

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ

БИБЛИОТЕКА

РАСЧЕТЧИКА

Редакционная коллегия:

лауреат Ленинской премии
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР

д-р техн. наук
проф. С. Д. ПОНОМАРЕВ
(председатель);

д-р техн. наук
проф. Н. А. АЛФУТОВ;
лауреат Ленинской премии

д-р техн. наук
проф. В. Л. БИДЕРМАН;

д-р техн. наук
проф. В. П. КОГАЕВ;
лауреат Ленинской премии
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР

д-р техн. наук
проф. Н. Н. МАЛИНИН;
д-р техн. наук проф.
В. А. СВЕТЛИЦКИЙ



Н.А.АЛФУТОВ

Основы расчета на устойчивость упругих систем

МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1978

6П5.1

A53

УДК 621.01 : 531.221.3.001.24

Рецензент проф. С. В. БОЯРШИНОВ

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1й КНИГИ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

**БИБЛИОТЕКА
КОЛОХВА
ОСКОРЖА**

Алфутов Н. А.

A53 Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.,
«Машиностроение», 1978 (Б-ка расчетчика).

312 с ил.

В книге даны основы расчета на устойчивость тонкостенных элементов машиностроительных конструкций, находящихся под действием статических нагрузок. Рассмотрены задачи устойчивости стержней, пластин и оболочек, причем особое внимание уделено постановке задач, выводу исходных соотношений и пределам применимости расчетных зависимостей.

Книга предназначена для инженеров-машиностроителей, работающих в конструкторских бюро, проектных организациях и научно-исследовательских институтах; она может быть полезна преподавателям строительной механики и сопротивления материалов, аспирантам и студентам машиностроительных специальностей.

A $\frac{31301-026}{038(01)-78}$ 26-78

6П5.1

Предисловие

Улучшение прочностных характеристик традиционных конструкционных материалов и использование новых высокопрочных композиционных материалов обусловило широкое распространение легких, изящных и экономичных тонкостенных конструкций в современном машиностроении. Для таких конструкций роль расчетов на устойчивость в общем цикле прочностных расчетов существенно возросла, ибо разрушение тонкостенной конструкции чаще всего связано с потерей ее общей устойчивости или устойчивости отдельных ее элементов.

В нашей стране и за рубежом резко увеличился поток статей, диссертаций и монографий как по общим подходам и методам исследований устойчивости тонкостенных конструкций, так и по ряду частных задач расчета на устойчивость тонкостенных стержней, стержневых систем, подкрепленных пластин и оболочек, трехслойных пластин и оболочек и т. д. В последние годы особенно интенсивно развивались различного рода численные методы расчета конструкций на устойчивость.

Однако в традиционно сложившихся учебных программах большинства машиностроительных специальностей вопросам устойчивости конструкций не уделяется должного внимания. Инженер нередко знаком с расчетами конструкций на устойчивость только по небольшому разделу устойчивости стержней из общего курса сопротивления материалов. Поэтому было решено включить в серию «Библиотека расчетчика» книгу, облегчающую инженеру переход от общих учебных курсов к чтению и пониманию специальной литературы по расчету на устойчивость тонкостенных силовых конструкций.

За последние два-три десятилетия в теории устойчивости конструкций, видимо, как ни в одной другой области механики выдвигались и дискутировались самые противоречивые концепции, высказывались сомнительные точки зрения и давались неверные рекомендации. Достаточно вспомнить долгое время пропагандировавшийся многими специалистами и даже вошедший в справочную литературу расчет конструкций на устойчивость по так называемым нижним критическим нагрузкам. И только сравнительно недавно благодаря усилиям ведущих отечественных и за-

рубежных ученых были выработаны единые точки зрения по большинству основных вопросов теории устойчивости конструкций. Круг вопросов, охватываемых данной книгой, сравнительно узок: устойчивость тонкостенных упругих систем при статических нагрузках. Но изложение этих вопросов базируется на современных представлениях теории упругой устойчивости.

В книге особое внимание уделено формулировке критериев упругой устойчивости, постановке задач устойчивости стержней, пластин и оболочек, выводу исходных соотношений и обсуждению пределов применимости полученных расчетных зависимостей. Автор умышленно стремился избегать ярких нестандартных задач, красивые и неожиданные решения которых доставляют истинное наслаждение специалистам, но отпугивают многих студентов и вызывают недоумение у некоторых инженеров-практиков. У автора было опасение, что интересные частные задачи могут отвлечь читателя от более прозаичных, но не менее тонких общих вопросов теории устойчивости.

В книгу не включен ряд практически важных задач расчета тонкостенных элементов конструкций, например устойчивость плоской формы изгиба балок, устойчивость витых пружин и естественно закрученных стержней, пологих оболочек, тонкостенных стержней и т. д. Это сделано по следующим соображениям. Автор старался сделать понятным вывод каждого соотношения даже неподготовленному читателю. Из множества задач устойчивости тонкостенных конструкций было выбрано несколько основных, на которых показана специфика задач упругой устойчивости. Автор надеется, что читатель, познакомившись с изложенными в книге решениями, сможет легче и глубже понять другие известные задачи устойчивости и главное скорее научится самостоятельно ставить и решать новые задачи.

Основные понятия теории упругой устойчивости

Для выявления большинства характерных особенностей задач теории упругой устойчивости совершенно не обязательно рассматривать сложные механические системы. Это можно сделать, ограничившись исследованием простейших механических систем, допускающих элементарное аналитическое описание.

В первой, вводной главе, важнейшие понятия теории упругой устойчивости — точка бифуркации, критическая нагрузка, линеаризованное уравнение, граница области устойчивости и энергетический критерий устойчивости — введены и проиллюстрированы на примерах упругих систем с одной-двумя степенями свободы, подобно тому, как это обычно делается в теории механических колебаний. Кроме того, в первой главе рассмотрены ограничения и допущения, используемые обычно при формулировке и решении задач устойчивости тонкостенных элементов силовых конструкций.

§ 1. Неоднозначность состояний равновесия упругих систем

При одних и тех же внешних нагрузках и условиях закрепления упругая система может иметь не одно, а несколько состояний равновесия. Покажем это на самых простых примерах.

Рассмотрим жесткий стержень длиной l , один конец которого закреплен в упругом шарнире, а другой — нагружен вертикальной силой P . В исходном ненагруженном состоянии ось стержня строго вертикальна. При отклонениях стержня сила P сохраняет вертикальное направление (рис. 1.1, *a*). Момент в упругом шарнире будем считать пропорциональным углу отклонения стержня φ и равным $k\varphi$, где k — жесткость упругого шарнира. Тогда, записав уравнение равновесия стержня в отклоненном от вертикали состоянии, получим

$$Pl \sin \varphi = k\varphi. \quad (1.1)$$

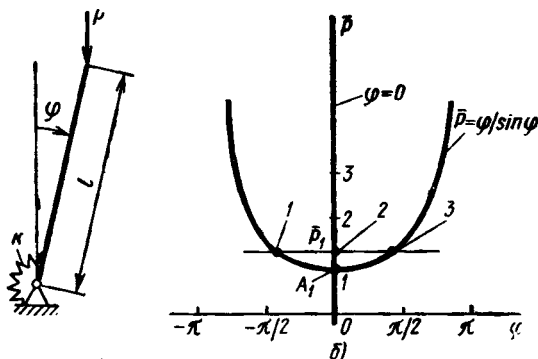


Рис. 1.1

Полученное уравнение имеет два независимых решения:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \varphi = 0 \text{ при любом значении } P; \\ 2) \quad P = \frac{k}{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Кривые, соответствующие этим решениям при $|\varphi| < \pi$, показаны на рис. 1.1, б, где по оси ординат отложены значения безразмерной силы $\bar{P} = \frac{l}{k} P$. Как видим, при $\bar{P} < 1$ единственным возможным будет исходное вертикальное положение равновесия. При $\bar{P} > 1$ наряду с исходным вертикальным положением равновесия стержня ($\varphi = 0$) становятся возможными и другие положения равновесия при $\varphi \neq 0$. Так, например, при $\bar{P} = \bar{P}_1$ возможны три различных положения равновесия стержня, соответствующие точкам 1, 2 и 3 на рис. 1.1, б. Точка 2 соответствует вертикальному положению, а точки 1 и 3 — отклоненным положениям равновесия. Если рассмотрим поворот стержня на произвольный угол φ , то увидим, что с ростом абсолютного значения безразмерной силы $\bar{P}$ число возможных положений равновесия неограниченно возрастает.

Рассмотрим жесткий стержень длиной l , один конец которого шарнирно закреплен, а на другом конце имеется пружина жесткости c , сохраняющая при отклонениях стержня горизонтальное положение (рис. 1.2, а). Как и в первом примере, к стержню приложена вертикальная сила P , причем в исходном ненагруженном состоянии ось стержня строго вертикальна. Считая усилие в пружине пропорциональным ее удлинению и, следовательно, равным $cl \sin \varphi$, запишем уравнение равновесия стержня в отклоненном положении:

$$Pl \sin \varphi = cl \sin \varphi l \cos \varphi. \quad (1.3)$$

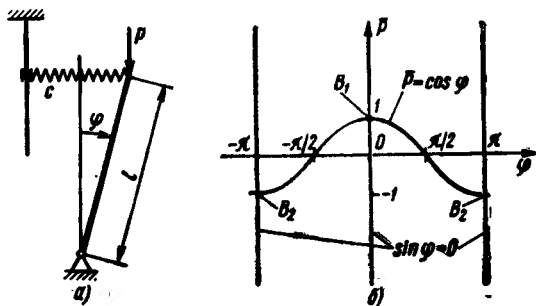


Рис. 1.2

Это уравнение имеет несколько независимых решений:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sin \varphi = 0, \text{ т. е. при любом } P \text{ возможно} \\ \varphi = n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ 2) P = cl \cos \varphi. \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

На рис. 1.2, б изображен график, соответствующий найденным решениям (по оси ординат отложены значения безразмерной силы $\bar{P} = \frac{P}{cl}$). И в этом примере при одном и том же значении нагрузки система может иметь несколько различных положений равновесия. Так, при $\bar{P} = 0$ возможны четыре различных положения статического равновесия системы, соответствующие $\varphi = 0; +\pi/2; -\pi/2; \pi$.

Очевидно, что другие корни уравнения (1.3) не дадут новых положений равновесия; например, $\varphi = \pi$ и 3π будут соответствовать одному и тому же «опрокинутому» положению равновесия стержня и т. д.

Итак, даже на простых примерах можно показать, что при одной и той же внешней нагрузке и одних и тех же условиях закрепления упругая система может иметь несколько различных положений равновесия. Чрезвычайно важно подчеркнуть, что эта множественность положений равновесия может быть обнаружена только в том случае, когда уравнения равновесия составляются для деформированной, отклоненной от своего исходного ненагруженного положения системы. В линейной теории упругости уравнения равновесия составляют для недеформированной системы, т. е. используют «принцип неизменности начальных размеров» сопротивления материалов. В этом случае при заданных условиях закрепления и заданных внешних нагрузках всегда будет обнаружено только одно единственное положение статического равновесия упругой системы. Так, в рассмотренных примерах, составляя уравнения равновесия для недеформированной системы, не обнаружим других положений равновесия стержня, кроме исходного вертикального положения.

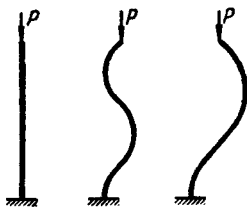


Рис. 1.3

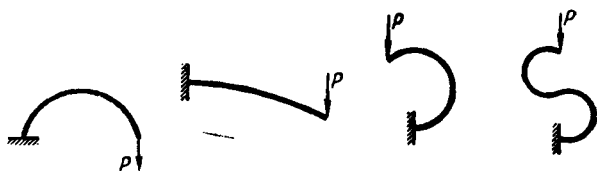


Рис. 1.4

Для более сложных упругих систем число различных возможных положений равновесия, естественно, возрастает, а вид возможных равновесных конфигураций усложняется. Так, например, на рис. 1.3 и 1.4 показаны различные формы равновесия гибкого стержня (они, конечно, становятся возможными только при достаточно больших нагрузках).

В задачу теории упругой устойчивости входит определение условий, при которых становятся возможными различные состояния равновесия системы, установление форм равновесных конфигураций и выяснение того, какие из этих конфигураций соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а какие нет.

§ 2. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия

Наглядной иллюстрацией устойчивого и неустойчивого равновесия служит поведение тяжелого шарика на гладкой поверхности (рис. 1.5). Интуиция и опыт подсказывают, что помещенный на вогнутую поверхность шарик останется на месте, а с выпуклой и седлообразной поверхностями он скатится. Положение шарика на вогнутой поверхности устойчиво, а положение шарика на выпуклой и седлообразной поверхностях неустойчиво. Аналогично два соединенных шарниром прямых стержня при растягивающей силе находятся в устойчивом положении равновесия, а при сжимающей силе — в неустойчивом (рис. 1.6).

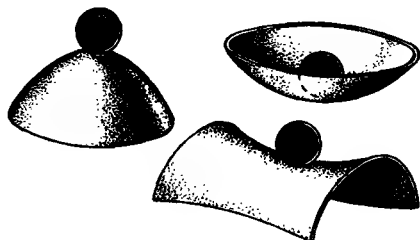


Рис. 1.5

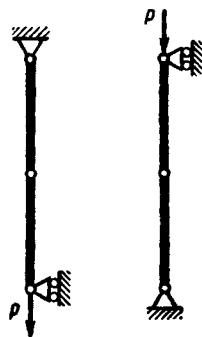


Рис. 1.6

Но интуиция может дать верный ответ только в простейших случаях; для более сложных систем одной интуиции оказывается недостаточно. Например, даже для сравнительно простой механической системы, изображенной на рис. 1.7, *а*, интуиция может лишь подсказать, что положение равновесия шарика на вершине при очень малой жесткости пружины будет неустойчивым, а с увеличением жесткости пружины оно должно стать устойчивым. Для изображенной на рис. 2.3, *б* системы стержней, соединенных шарнирами, на основе интуиции можно только сказать, что исходное положение равновесия этой системы устойчиво или неустойчиво в зависимости от соотношения между силой, жесткостью пружины и длиной стержней.

Для того чтобы решить устойчиво или неустойчиво равновесие механической системы, необходимо использовать аналитические признаки устойчивости. Наиболее общим подходом к изучению устойчивости положения равновесия в механике является энергетический подход, основанный на исследовании изменения полной потенциальной энергии системы при отклонениях от положения равновесия.

В положении равновесия полная потенциальная энергия консервативной механической системы имеет стационарное значение, причем, согласно теореме Лагранжа, положение равновесия устойчиво, если это значение соответствует минимуму полной потенциальной энергии. Не углубляясь в математические тонкости, поясним эти общие положения на простейших примерах.

В системах, изображенных на рис. 1.5, полная потенциальная энергия изменяется пропорционально вертикальному смещению шарика. Когда шарик опускается, его потенциальная энергия, естественно, уменьшается. Если шарик поднимается, то потенциальная энергия возрастает. Поэтому нижняя точка вогнутой поверхности соответствует минимуму полной потенциальной энергии и положение равновесия шарика в этой точке устойчиво. Вершина выпуклой поверхности соответствует стационарному, но не минимальному значению полной потенциальной энергии (в данном случае — максимальному значению). Поэтому положение равновесия шарика здесь неустойчиво. Стационарная точка на седлообразной поверхности тоже не соответствует минимуму полной потенциальной энергии (это так называемая точка минимакса) и положение равновесия шарика здесь неустойчиво. Последний случай весьма характерен. В неустойчивом состоянии равновесия потенциальная энергия вовсе не должна достигать максимального значения. **Положение равновесия не будет устойчи-**

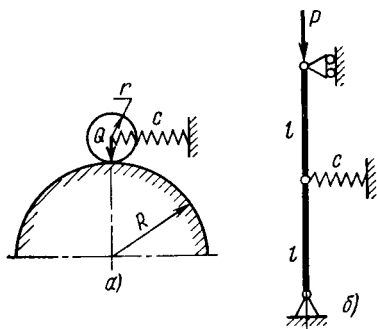


Рис. 1.7

вым во всех случаях, когда полная потенциальная энергия имеет стационарное, но не минимальное значение.

Для изображенной на рис. 1.6 стержневой системы также не трудно установить, что при растягивающей силе вертикальное неотклоненное положение стержней соответствует минимуму потенциальной энергии и поэтому является устойчивым. При сжимающей силе неотклоненное положение стержней соответствует максимуму потенциальной энергии и является неустойчивым.

Предоставив возможность читателю самому установить условия устойчивости систем, изображенных на рис. 1.7, вернемся к двум рассмотренным в предыдущем параграфе задачам.

Полная потенциальная энергия упругой системы (с точностью до постоянного слагаемого, которое опускаем) складывается из внутренней энергии деформации U и потенциала внешних сил Π :

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (1.5)$$

Составим выражение для полной потенциальной энергии стержня с упругим шарниром, нагруженного вертикальной силой (см. рис. 1.1). Энергия деформации упругого шарнира $U = \frac{1}{2} k\varphi^2$. Потенциал внешних сил с точностью до постоянного слагаемого равен взятому с обратным знаком произведению силы P на вертикальное перемещение точки ее приложения, т. е. $\Pi = -Pl(1 - \cos \varphi)$. Следовательно, полная потенциальная энергия

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k\varphi^2 - Pl(1 - \cos \varphi). \quad (1.6)$$

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы: ее деформированное состояние полностью описывается одним независимым параметром. В качестве такого параметра взят угол φ , поэтому для исследования устойчивости системы нужно найти производные полной потенциальной энергии по углу φ .

Дифференцируя выражение (1.6) по φ , получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\varphi} = k\varphi - Pl \sin \varphi; \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = k - Pl \cos \varphi. \quad (1.8)$$

Приравнявая нулю первую производную полной потенциальной энергии, приходим к уравнению (1.1), которое раньше было получено непосредственно из условий равновесия стержня. Исследование знака второй производной позволяет установить, какие из найденных положений равновесия устойчивы.

Исследуем устойчивость положений равновесия стержня, соответствующих двум независимым решениям (1.2). Первое из них соответствует вертикальному неотклоненному положению стержня

при $\varphi = 0$. Согласно выражению (1.8) для этого положения равновесия

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = k - Pl. \quad (1.9)$$

При $P < \frac{k}{l}$ полная потенциальная энергия минимальна и вертикальное положение стержня устойчиво, при $P > \frac{k}{l}$ полная потенциальная энергия максимальна и вертикальное положение стержня неустойчиво.

Для исследования устойчивости стержня в отклоненном положении подставим второе из решений (1.2) в выражение (1.8):

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = k \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg}_2 \varphi} \right). \quad (1.10)$$

Если $|\varphi| < \pi$, то вторая производная полной энергии положительна, поскольку тогда $\varphi < \operatorname{tg} \varphi$, и отклоненное положение стержня, которое возможно при $P > \frac{k}{l}$, всегда устойчиво.

Осталось еще не выясненным, устойчиво или неустойчиво положение равновесия, соответствующее точке пересечения двух решений при $\varphi = 0$ и $P = \frac{k}{l}$, поскольку в этой точке вторая производная полной энергии равна нулю. Как известно из курса математического анализа, в таких случаях для исследования стационарной точки следует использовать высшие производные. Последовательно дифференцируя, находим

$$\frac{d^3\mathcal{E}}{d\varphi^3} = Pl \sin \varphi; \quad \frac{d^4\mathcal{E}}{d\varphi^4} = Pl \cos \varphi. \quad (1.11)$$

В исследуемой точке третья производная равна нулю, а четвертая положительна. Следовательно, в этой точке полная потенциальная энергия минимальна и неотклоненное положение равновесия стержня при $P = \frac{k}{l}$ устойчиво.

Результаты проведенного исследования устойчивости различных положений равновесия стержня с упругим шарниром представлены на рис. 1.8. Там же показано изменение полной потенциальной энергии системы при $P > \frac{k}{l}$. Точки B_2 соответствуют минимумам полной потенциальной энергии и устойчивым отклоненным положениям равновесия; точка B_1 — максимуму энергии и неустойчивому вертикальному положению равновесия стержня.

Составим выражение полной потенциальной энергии системы, представленной на рис. 1.2. При отклонении стержня на угол φ пружина удлинится на величину $\lambda = l \sin \varphi$, а энергия дефор-

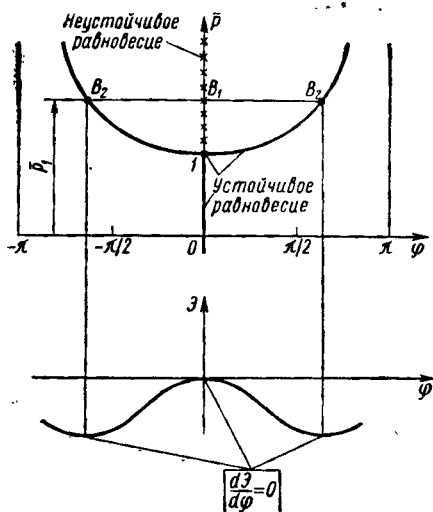


Рис. 1.8

тенциальной энергии, получим уравнение равновесия (1.3). Исследуя знак второй производной, можно выяснить, какие из положений равновесия стержня устойчивы. Так, для неотклоненного положения при $\varphi = 0$ вторая производная полной энергии равна

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = cl^2 - Pl.$$

Следовательно, при $P < cl$ вторая производная положительна и вертикальное положение равновесия устойчиво; при $P > cl$ вторая производная отрицательна и вертикальное положение неустойчиво. В отклоненном от вертикали положении равновесия, описываемом зависимостью $P = cl \cos \varphi$, вторая производная полной потенциальной энергии равна

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = cl^2 \cos 2\varphi - cl \cos^2 \varphi = -cl^2 \sin^2 \varphi.$$

Таким образом, при $\sin \varphi \neq 0$ вторая производная отрицательна и отклоненное положение равновесия стержневой системы неустойчиво.

Положения равновесия, соответствующие точкам пересечения двух решений (1.4), неустойчивы (например, неотклоненное положение стержня при $\varphi = 0$ и $P = cl$). В этом нетрудно убедиться, определяя в этих точках знаки высших производных.

мации пружины определяется выражением $U = \frac{1}{2} c\lambda^2$. Потенциал внешних сил подсчитывается так же, как и в предыдущей задаче. Таким образом,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} cl^2 \sin^2 \varphi - Pl(1 - \cos \varphi). \quad (1.12)$$

Последовательно дифференцируя, находим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\varphi} = cl^2 \sin \varphi \cos \varphi - Pl \sin \varphi;$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = cl^2 \cos 2\varphi - Pl \cos \varphi.$$

Приравнявая нулю первую производную полной

энергии, получим уравнение равновесия (1.3).

Исследуя знак второй производной, можно выяснить, какие из положений равновесия стержня устойчивы. Так, для неотклоненного положения при $\varphi = 0$ вторая производная полной энергии равна

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = cl^2 - Pl.$$

Следовательно, при $P < cl$ вторая производная положительна и вертикальное положение равновесия устойчиво; при $P > cl$ вторая производная отрицательна и вертикальное положение неустойчиво. В отклоненном от вертикали положении равновесия, описываемом зависимостью $P = cl \cos \varphi$, вторая производная полной потенциальной энергии равна

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = cl^2 \cos 2\varphi - cl \cos^2 \varphi = -cl^2 \sin^2 \varphi.$$

Таким образом, при $\sin \varphi \neq 0$ вторая производная отрицательна и отклоненное положение равновесия стержневой системы неустойчиво.

Положения равновесия, соответствующие точкам пересечения двух решений (1.4), неустойчивы (например, неотклоненное положение стержня при $\varphi = 0$ и $P = cl$). В этом нетрудно убедиться, определяя в этих точках знаки высших производных.

На рис. 1.9 показаны результаты проведенного исследования и характерные кривые изменения полной потенциальной энергии при различных уровнях нагружения.

Продемонстрированный на простейших примерах путь исследования устойчивости положений статического равновесия упругих систем используют и в случае более сложных систем. С усложнением упругой системы растут технические трудности его реализации, но принципиальная основа — условие минимума полной потенциальной энергии — полностью сохраняется.

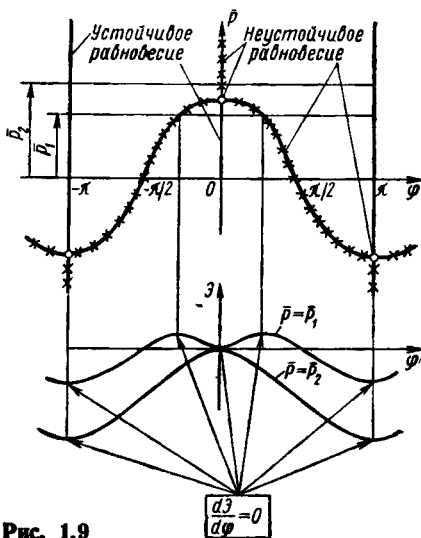


Рис. 1.9

§ 3. Точки бифуркации, предельные точки и критические нагрузки

На диаграмме нагрузка — перемещение, относящейся к первому примеру, ось ординат соответствует исходному вертикальному положению равновесия стержня, а кривая $\bar{P} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}$ — отклоненному положению равновесия (рис. 1.10, а). Как установлено, исходное вертикальное положение равновесия стержня остается устойчивым до тех пор, пока сила $P \leq \frac{k}{l}$. Поэтому

при нагружении до значения $\bar{P} = 1$ стержень остается в исходном вертикальном положении. При малейшем превышении указанного значения исходное вертикальное положение равновесия стержня становится неустойчивым и любые сколь угодно малые возмущения непременно должны вывести стержень из этого состояния. Поскольку в окрестности точки A_1 , соответствующей $\bar{P} = 1$, имеется другое устойчивое отклоненное положение равновесия, то стержень и перейдет в это новое состояние. На рис. 1.10, а поведение первой системы при нагружении схематично изображено стрелками. При $\bar{P} > 1$ стержень не сможет остаться в исходном вертикальном положении и отклонится вправо или влево.

На диаграмме нагрузка — перемещение для первой системы (рис. 1.10, а) характерной является точка A_1 , в которой ось ординат, соответствующая исходному положению равновесия, пересекается с кривой $\bar{P} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}$, соответствующей отклонен-

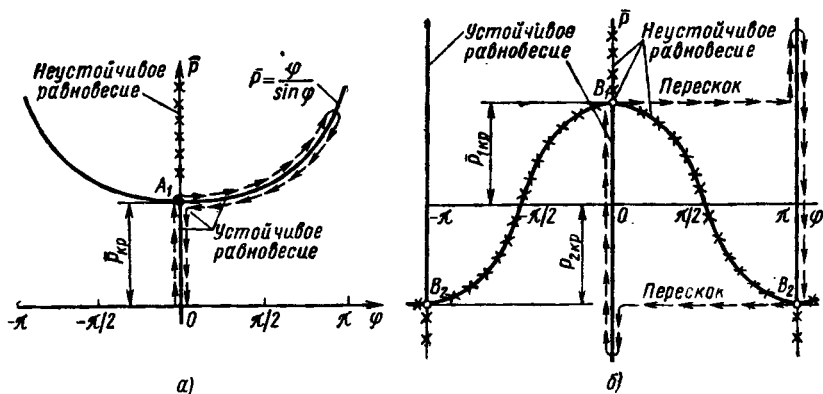


Рис. 1.10

ному положению. Такие точки, в которых решение расщепляется на две ветви, называются точками бифуркации или точками ветвления решения.

В данном случае точка A_1 характерна еще тем, что при переходе через нее исходное положение равновесия стержня перестает быть устойчивым: точки оси ординат, лежащие ниже точки A_1 соответствуют устойчивым состояниям, а точки оси ординат, лежащие выше точки A_1 , — неустойчивым состояниям. В дальнейшем точки на диаграмме нагрузка — перемещение, при переходе через которые исходное состояние равновесия перестает быть устойчивым, будем называть критическими точками, а соответствующие им значения нагрузок — критическими значениями нагрузок или критическими нагрузками. Критические нагрузки будем обозначать индексом $кр$, например, в рассмотренном примере $P_{кр} = \frac{k}{l}$.

Вторая система качественно иначе ведет себя под нагрузкой. Исходное вертикальное положение стержня остается устойчивым до тех пор, пока $\bar{P} < 1$. В точке бифуркации B_1 ось ординат, соответствующая на рис. 1.10, б исходному положению равновесия, пересекается с кривой $\bar{P} = \cos \varphi$, которая описывает новое неустойчивое положение равновесия. Точка B_1 критическая, поскольку при переходе через нее устойчивое исходное положение равновесия становится неустойчивым. Для второй системы критическая нагрузка $P_{кр} = cl$. При достижении критической нагрузки рассматриваемая система не сможет оставаться в исходном вертикальном положении, поскольку оно становится неустойчивым и любые сколь угодно малые возмущения выведут ее из него. Но в отличие от первой системы у второй нет никаких новых устойчивых положений статического равновесия в окрестности критической точки бифуркации B_1 . Поэтому потеря устойчивости исходного вертикального положения равновесия неиз-

бежно сопровождается скачкообразным переходом в удаленное на конечное расстояние новое устойчивое положение статического равновесия (в рассматриваемом примере стержень просто опрокидывается). На рис. 1.10, *a* стрелками показано поведение второй системы.

Важно подчеркнуть, что если в первой системе переход от исходного вертикального положения равновесия к новому отклоненному положению статического равновесия при плавном увеличении нагрузки происходит плавно без перескоков, то во второй системе даже плавное увеличение нагрузки неизбежно сопровождается скачкообразным переходом в новое устойчивое статическое положение равновесия. (В реальных условиях при таком перескоке возникают колебания относительно нового устойчивого положения статического равновесия. И только после того как силы сопротивления погасят колебания, система займет новое устойчивое положение статического равновесия. Этот переходный процесс описывается с использованием динамического подхода и здесь не рассматривается [18].)

При разгрузке две рассматриваемые системы ведут себя также по-разному. При уменьшении нагрузки первая система в обратном порядке проходит все этапы нагружения: в точке бифуркации A_1 устойчивое отклоненное положение равновесия сменяется устойчивым неотклоненным положением (рис. 1.10, *a*). Вторая система проходит через новую точку бифуркации B_2 , где становится неустойчивым отклоненное положение равновесия. При достижении точки бифуркации B_2 система возвращается в исходное положение путем перескока (рис. 1.10, *б*). В таких случаях точку B_1 иногда называют верхней критической точкой, соответствующее ей значение нагрузки — верхним критическим значением. Точку B_2 называют нижней критической точкой, соответствующее ее значение нагрузки — нижним критическим значением нагрузки. Эти значения нагрузок будем соответственно обозначать $P_{1кр}$ (или $P_{кр}$) и $P_{2кр}$. Так, в рассмотренном примере $P_{1кр} = cl$ и $P_{2кр} = -cl$.

В дальнейшем нам будут встречаться критические точки бифуркации двух рассмотренных выше основных типов. В критической точке бифуркации первого типа исходная устойчивая форма равновесия сменяется другой устойчивой формой равновесия, причем точка бифуркации первого типа соответствует устойчивому равновесию (например, точка A_1 на рис. 1.10, *a*). В критической точке бифуркации второго типа исходная устойчивая форма равновесия сменяется другой неустойчивой формой равновесия, причем и точка бифуркации второго типа соответствует неустойчивому равновесию (например, точка B_1 на рис. 1.10, *б*).

Вообще говоря, могут быть точки бифуркации других типов, например, точки, в которых пересекаются два решения, соответствующие неустойчивым положениям равновесия (согласно приведенному выше определению они не являются критическими).

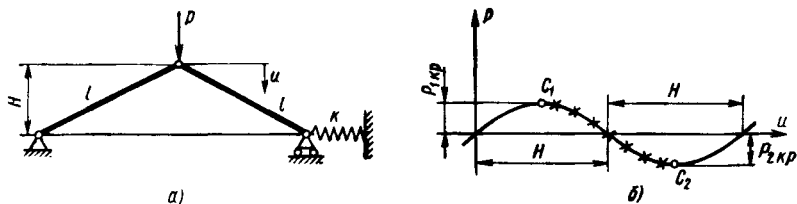


Рис. 1.11

Однако точки бифуркации указанных выше двух типов играют первостепенную роль в теории упругой устойчивости.

Кроме точек бифуркации в теории устойчивости важное значение имеют так называемые **предельные точки**.

На рис. 1.11, а изображена система, состоящая из двух жестких стержней, соединенных шарниром. Зависимость между силой P и вертикальным перемещением u точки ее приложения имеет вид кривой, показанной на рис. 1.11, б. (Считая $H \ll l$, нетрудно получить аналитическое выражение этой зависимости). Точки C_1 и C_2 — типичные примеры предельных точек.

В предельной точке не пересекаются различные решения. Однако при переходе через нее устойчивое равновесие становится неустойчивым, причем предельная точка обычно соответствует неустойчивому равновесию. В соответствии с приведенным выше определением **предельные точки исходной формы равновесия являются критическими**.

Критические точки бифуркации первого типа характерны для задач устойчивости упругих стержней и пластин, критические точки бифуркации второго типа — для задач устойчивости тонких упругих оболочек. Критические предельные точки характерны для задач устойчивости пологих оболочек и тонких упругих оболочек с начальными геометрическими несовершенствами.

В предыдущих примерах при определении точек бифуркации и критических нагрузок рассматривались не только простейшие механические системы, но и их предельно идеализированные схемы. Возникает естественный вопрос, насколько полно и точно такие схемы могут отражать поведение реальных систем. Так, в рассматриваемых выше примерах считалось, что оси стержней до нагружения расположены строго вертикально. В реальной системе практически всегда начальный угол отклонения оси стержня от вертикали не равен нулю. На тех же простейших примерах выясним, насколько существенно влияние начальных геометрических несовершенств такого типа на поведение систем под нагрузкой, т. е. насколько различно поведение систем, имеющих начальные геометрические несовершенства, и идеализированных.

Снова рассмотрим первый пример, но будем считать, что в ненагруженном состоянии ось стержня отклонена от вертикали

на некоторый угол φ_0 (рис. 1.12, а). Если полный угол отклонения стержня при нагружении обозначить φ_n , то момент в упругом шарнире будет равен $k(\varphi_n - \varphi_0)$ и условие равновесия стержня в отклоненном состоянии приведет к уравнению

$$Pl \sin \varphi_n = k(\varphi_n - \varphi_0).$$

Откуда при $\varphi_0 \neq 0$ получим

$$P = \frac{k}{l} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{\sin \varphi_n}.$$

Несложный анализ позволяет установить, какие из ветвей полученного решения соответствуют устойчивым положениям равновесия. Результат такого анализа схематично изображен на рис. 1.12, б.

При плавном увеличении нагрузки реализуется правая ветвь, все точки которой соответствуют устойчивым положениям равновесия отклоненного стержня. На этой ветви кривой при $\varphi_0 \neq 0$ нет ни точек бифуркации, ни предельных точек: с увеличением нагрузки угол отклонения стержня монотонно увеличивается. Левая ветвь, содержащая предельную точку C_2 , может быть реализована только тогда, когда к стержню приложена некоторая дополнительная поперечная нагрузка, а затем она снята.

На рис. 1.12, в показан вид правых ветвей в окрестности точки бифуркации A_1 для нескольких различных значений начального угла отклонения φ_0 . Вид кривых позволяет сделать два важных вывода о поведении рассматриваемой системы с начальными геометрическими несовершенствами. Во-первых, точка бифуркации первого типа A_1 существует только в случае предельно идеализированной системы, когда $\varphi_0 = 0$. При любых не равных нулю значениях φ_0 точка бифуркации исчезает и с ростом нагрузки угол φ_n монотонно увеличивается без качественных изменений форм равновесия. Во-вторых, если $\varphi_0 \ll 1$, то быстрый рост φ_n происходит только с приближением нагрузки к ее критическому значению, соответствующему точке бифуркации A_1 идеализированной системы при $\varphi_0 = 0$. При малых нагрузках

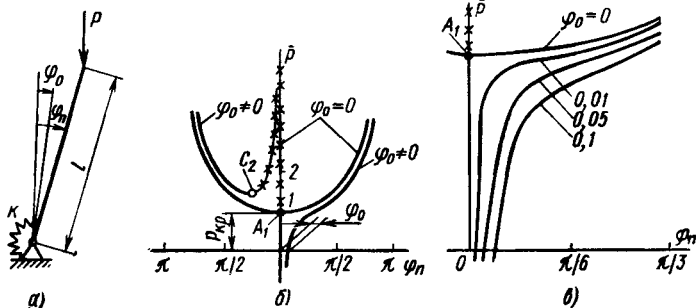


Рис. 1.12

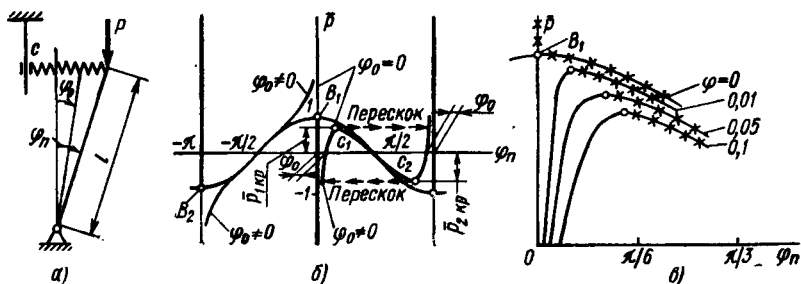


Рис. 1.13

по сравнению с этим критическим значением отклонения стержня остаются малыми.

Рассмотрим влияние начального отклонения φ_0 на поведение второй из исследованных выше простейших систем (рис. 1.13). При отклонении стержня на угол φ_n усилие в пружине равно $cl (\sin \varphi_n - \sin \varphi_0)$ и условие равновесия отклоненного стержня приводит к уравнению

$$Pl \sin \varphi_n = cl^2 (\sin \varphi_n - \sin \varphi_0) \cos \varphi_n.$$

Откуда при $\varphi_0 \neq 0$ находим

$$P = cl \frac{\sin \varphi_n - \sin \varphi_0}{\lg \varphi_n}.$$

Проанализировав знак второй производной полной потенциальной энергии по углу отклонения системы, можно установить, какие из ветвей полученного решения соответствуют устойчивым положениям равновесия. Для $|\varphi_n| < \pi$ результат такого анализа изображен на рис. 1.13, б. Как видим, поведение этой системы при $\varphi_0 \neq 0$ качественно отличается от поведения рассмотренной выше системы. При $\varphi_0 \neq 0$ критическая точка бифуркации второго типа B_1 трансформируется в критическую предельную точку C_1 . При достижении этой предельной точки происходит потеря устойчивости исходной формы равновесия системы, причем поскольку в окрестности предельной точки C_1 нет новых устойчивых положений равновесия, система вынуждена скачком перейти в новое устойчивое положение, удаленное от исходного на конечное расстояние.

На рис. 1.13, в построены кривые нагрузка—перемещение для рассматриваемой системы при нескольких значениях начального угла отклонения φ_0 .

По результатам анализа влияния начальных отклонений на поведение этой системы можно сделать следующие выводы. Во-первых, критическая точка бифуркации второго типа B_1 , существующая только для предельно идеализированной системы,

при любых не равных нулю значениях φ_0 трансформируется в критическую предельную точку. Во-вторых, при наличии начальных отклонений верхняя критическая нагрузка становится меньше значения, соответствующего точке бифуркации B_1 идеализированной системы.

Поведение значительно более сложных упругих систем аналогично поведению рассмотренных простейших систем с начальными несовершенствами. Так, если предельно идеализированная система без начальных несовершенств имеет критическую точку бифуркации первого типа, то поведение реальной системы с начальными несовершенствами вблизи этой точки бифуркации аналогично поведению первой из рассмотренных простейших систем (см. рис. 1.12). Если предельно идеализированная система без начальных несовершенств имеет критическую точку бифуркации второго типа, то поведение реальной системы вблизи этой точки бифуркации аналогично поведению второй из рассмотренных простейших систем (рис. 1.13).

§ 4. Линеаризованные уравнения

В рассмотренных выше простейших примерах легко составить и точно решить полные нелинейные уравнения при произвольных значениях перемещений системы. Проведенный анализ дает исчерпывающую информацию о всех возможных устойчивых и неустойчивых положениях равновесия. Но подавляющее большинство практически важных задач значительно сложнее приведенных и получение таких полных точных решений для них не представляется возможным. Это заставляет искать приближенные, упрощенные пути исследования поведения сложных упругих систем под действием приложенных к ним нагрузок.

При решении задач упругой устойчивости центральное место занимает определение критических точек бифуркации и критических нагрузок. Точки бифуркации определяются как точки пересечения различных решений нелинейных уравнений (именно так они определялись в рассмотренных выше примерах). Но их можно найти и иначе, минуя решение нелинейных уравнений. Это можно сделать с помощью **однородных линеаризованных уравнений**.

Основная идея определения точек бифуркации с помощью однородных линеаризованных уравнений состоит в следующем. Предположим, что одна какая-то форма равновесия системы известна и нужно найти точки бифуркации этой формы равновесия. Для этого достаточно, не интересуясь поведением системы вдали от известной формы равновесия, найти условия существования других форм равновесия, отличных от исходной, но бесконечно к ней близких. Те точки, в окрестностях которых существуют такие формы равновесия, и будут точками бифуркации.

Рассмотрим, как можно получить и использовать линейаризованные уравнения на знакомых простейших примерах. В первом примере тривиальное исходное состояние равновесия $\varphi = 0$ можно считать известным и без решения полного нелинейного уравнения. Найдем условия существования других состояний равновесия, бесконечно близких к этому исходному. В данном случае найдем условие равновесия стержня, отклоненного от вертикали на бесконечно малый угол φ_1 (рис. 1.14, а). Угол φ_1 считаем бесконечно малым и в уравнении равновесия учитываем только те слагаемые, которые содержат этот угол в первой степени (отсюда и название «линейаризованное уравнение»). Тогда можно записать $Pl\varphi_1 = k\varphi_1$, или

$$(Pl - k)\varphi_1 = 0. \quad (1.13)$$

Полученное однородное и линейное относительно φ_1 уравнение всегда имеет тривиальное решение $\varphi_1 = 0$, соответствующее исходному вертикальному положению равновесия стержня. Интересующее нас сейчас отклоненное положение равновесия при $\varphi_1 \neq 0$ возможно, если выражение, стоящее в скобках, обращается в нуль, т. е. если $P = \frac{k}{l}$. Таким образом из условия

существования нетривиального решения линейаризованного уравнения найдена та же точка бифуркации, которая выше определена как точка ветвления решения полного нелинейного уравнения.

Аналогично можно получить линейаризованное уравнение и для второго из рассмотренных выше примеров (см. рис. 1.2, а). Рассмотрев равновесие стержня, отклоненного от вертикали на бесконечно малый угол φ_1 , получим

$$(Pl - cl^2)\varphi_1 = 0. \quad (1.14)$$

Условие существования нетривиального решения этого уравнения, т. е. условие $(P - cl) = 0$, приводит к той же точке бифуркации, которая раньше найдена как точка пересечения двух различных решений нелинейного уравнения.

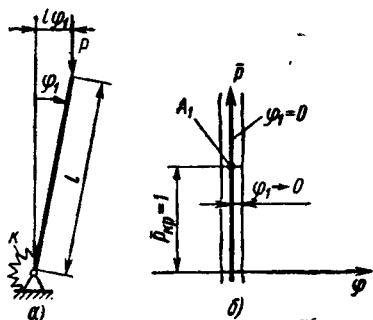


Рис. 1.14

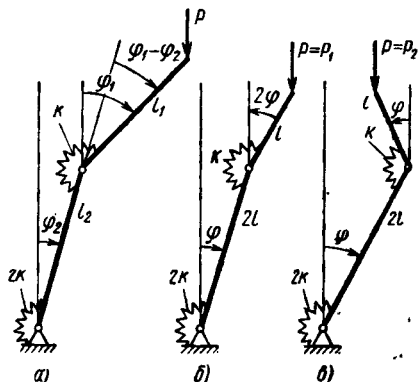


Рис. 1.15

Линеаризованные уравнения дают возможность найти точки бифуркации, но при этом остаются совершенно не выясненными ни тип точки бифуркации, ни характер поведения системы при конечных отклонениях от исходного положения равновесия. Действительно, однородные линеаризованные уравнения (1.13) и (1.14) принципиально ничем не отличаются одно от другого, хотя точки бифуркации соответствующих систем относятся к разным типам и при отклонениях от исходного положения равновесия эти системы ведут себя качественно различно. Схематично это показано на рис. 1.14, б. Однородное линеаризованное уравнение получено для бесконечно малых величин φ_1 , поэтому оно не может дать никакой информации о поведении системы при конечных отклонениях.

Этот способ определения точек бифуркации с помощью линеаризованных уравнений можно использовать при решении других более сложных задач.

Рассмотрим, например, систему, состоящую из двух жестких стержней с двумя упругими шарнирами (рис. 1.15, а). До нагружения оси стержней расположены на одной вертикали и сила P действует вдоль этой вертикали. Состояние равновесия такой системы, при котором стержни остаются на одной вертикальной прямой, будем считать исходным. С помощью линеаризованных уравнений найдем точки бифуркации этого исходного состояния.

Отклоненное положение системы будем задавать углами φ_1 и φ_2 , так как система имеет две степени свободы. Внутренние моменты в упругих шарнирах соответственно равны $k_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $k_2\varphi_2$, где k_1 и k_2 — жесткости упругих шарниров. Рассмотрим условия равновесия каждого из стержней. Считая углы φ_1 и φ_2 бесконечно малыми и учитывая только линейные относительно φ_1 и φ_2 слагаемые, получим систему линеаризованных уравнений

$$\left. \begin{aligned} k_1(\varphi_1 - \varphi_2) - Pl_1\varphi_1 &= 0; \\ k_2\varphi_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) - Pl_2\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Эта однородная система линейных уравнений имеет тривиальное решение $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$, соответствующее исходному вертикальному положению равновесия. Для существования решений, отличных от нуля, необходимо, чтобы определитель полученной системы был равен нулю. Таким образом, для того чтобы найти точки бифуркации, необходимо решить уравнение

$$\begin{vmatrix} (k_1 - Pl_1) & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 - Pl_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.16)$$

Раскрыв определитель, получим квадратное относительно P уравнение

$$P^2 - P \left(\frac{k_1 + k_2}{l_2} + \frac{k_1}{l_1} \right) + \frac{k_1 k_2}{l_1 l_2} = 0. \quad (1.17)$$

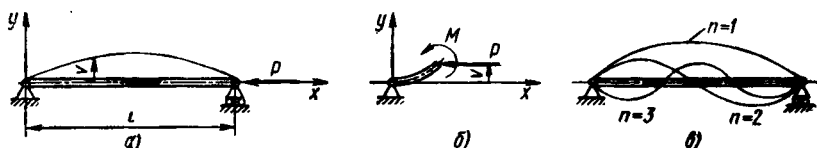


Рис. 1.16

Положив, например, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, найдем корни уравнения $P_1 = \frac{k}{2l}$ и $P_2 = \frac{2k}{l}$. Это и будут те значения нагрузки, при которых возможны смежные с исходным отклоненные состояния равновесия системы.

Линеаризованные уравнения позволяют с точностью до масштаба определять равновесные конфигурации системы в смежных с исходным состояниями. Так, из уравнений (1.15) следует, что при $P = P_1$ углы φ_1 и φ_2 связаны соотношением $\varphi_1 = 2\varphi_2$, а при $P \neq P_2$ соотношением $\varphi_1 = -\varphi_2$. Соответствующие равновесные конфигурации изображены на рис. 1.15, б и в.

Если отклонения упругой системы от исходного положения равновесия могут быть полностью описаны N независимыми параметрами (т. е. если упругая система имеет N степеней свободы), то линеаризация условий равновесия вблизи исходного положения системы приводит к системе N линейных однородных уравнений с N неизвестными. Для существования нетривиальных решений этой системы ее определитель должен быть равен нулю. Указанное условие приводит к уравнению, позволяющему найти точки бифуркации исходного положения равновесия. Если это уравнение не имеет кратных корней, то число точек бифуркации равно числу степеней свободы рассматриваемой системы.

Для системы с распределенными параметрами, которую можно трактовать как систему с бесконечным числом степеней свободы, линеаризация условий равновесия вблизи исходного положения равновесия системы приводит к однородным дифференциальным уравнениям. Их решение дает, вообще говоря, бесконечное число точек бифуркации.

Рассмотрим шарнирно опертый стержень изгибной жесткости EJ , сжатый силой P (рис. 1.16, а). До нагружения ось стержня считаем строго прямой, а линию действия силы совпадающей с осью стержня. Тогда возможна прямолинейная форма равновесия стержня, которую примем за исходную. Найдем условия существования форм равновесия стержня с искривленной осью, бесконечно близких к исходной прямолинейной форме равновесия. Поперечные прогибы стержня обозначим v ; тогда из условия равновесия части стержня в искривленном состоянии (рис. 1.16, б) можно записать

$$M + Pv = 0, \quad (1.18)$$

где M — внутренний изгибающий момент, связанный с поперечным прогибом зависимостью

$$M = EJ \frac{1}{\rho} = EJ \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}};$$

здесь $\frac{1}{\rho}$ — кривизна изогнутой оси стержня.

Учитывая в уравнении (1.18) только линейные относительно поперечного прогиба v слагаемые, приходим к линеаризованному уравнению

$$EJ \frac{d^2v}{dx^2} + Pv = 0. \quad (1.19)$$

Если изгибная жесткость стержня постоянна, то обозначив $\frac{P}{EJ} = k^2$, получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$v'' + k^2v = 0, \quad (1.20)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x .

Граничные условия рассматриваемой задачи

$$1) v(0) = 0; \quad 2) v(l) = 0. \quad (1.21)$$

Общее решение уравнения (1.20) имеет вид

$$v = A \sin kx + B \cos kx. \quad (1.22)$$

Из граничных условий (1.21) для произвольных постоянных A и B получим однородную систему уравнений

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0;$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0.$$

Условие существования отличных от нуля решений этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда следует характеристическое уравнение

$$\sin kl = 0. \quad (1.23)$$

Корни этого уравнения дают те значения силы P , при которых существуют формы равновесия стержня с искривленной осью

$$P = P_n = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.24)$$

Если $P = P_n$, то форма изогнутой оси стержня с точностью до масштаба описывается функцией (рис. 1.16, в)

$$v_n = \sin \frac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.25)$$

Наименьшее значение P_n соответствует $n = 1$

$$P_1 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (1.26)$$

В задачах устойчивости обычно нужно найти точку бифуркации, соответствующую наименьшему значению нагрузки. Как показано ниже, эта точка и соответствующее ей значение нагрузки являются критическими. В рассмотренном примере $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, а потеря устойчивости происходит по форме, соответствующей $n = 1$.

Таким образом, однородные линейаризованные уравнения дают возможность находить точки бифуркации и с точностью до масштаба определять конфигурации равновесных положений системы в окрестностях точек бифуркаций. Но однородные линейаризованные уравнения не могут дать информации о поведении системы при конечных значениях ее отклонений от исследуемого исходного положения равновесия и о характере точек бифуркации.

Однородные линейаризованные уравнения теории упругой устойчивости — основной рабочий инструмент этой теории — относятся к разделу математики, называемому задачи на собственные значения (см. приложение I). Кроме однородных линейаризованных уравнений, служащих для определения точек бифуркации, в теории упругой устойчивости широко применяют неоднородные линейаризованные уравнения для приближенного описания поведения систем с начальными неправильностями при малых, но конечных значениях отклонений. Такие уравнения достаточно полно характеризуют поведение систем вблизи точек бифуркаций первого типа (см., например, § 18).

Кроме изложенного способа получения линейаризованных уравнений возможен и другой более строгий способ, основанный на линейаризации полных нелинейных уравнений [28].

§ 5. Энергетический подход к определению критических нагрузок

Исходное состояние равновесия, рассмотренной в предыдущем параграфе стержневой системы (см. рис. 1.15) $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ известно. Для определения точек бифуркации нужно найти условия существования новых равновесных состояний, смежных с исходным. Для этого можно подсчитать полную потенциальную энергию в состоянии, смежном с исходным. Тогда условие ста-

ционарности этой энергии при $\varphi_1 \rightarrow 0$ и $\varphi_2 \rightarrow 0$ должно привести к точкам бифуркации исходного состояния. Если при этом полную потенциальную энергию подсчитывать в виде разложения по φ_1 и φ_2 , то для определения точек бифуркации, видимо, не понадобятся высокие степени φ_1 и φ_2 . Как будет видно из дальнейшего, для определения точек бифуркации в разложении полной потенциальной энергии необходимо и достаточно учесть квадратичные слагаемые относительно φ_1 и φ_2 .

Полная потенциальная энергия складывается из внутренней энергии деформации и потенциала внешних сил.

Энергия деформации упругих шарниров при отклонениях системы на углы φ_1 и φ_2 равна

$$U = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2. \quad (1.27)$$

Потенциал внешних сил с точностью до постоянного слагаемого определяется выражением

$$P = -P [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)].$$

Ограничившись квадратичными членами разложения косинусов, окончательно найдем

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2 - \frac{1}{2} P (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2) + \mathcal{E}_0, \quad (1.28)$$

где $\mathcal{E}_0$ — полная потенциальная энергия исходного состояния равновесия, не зависящая от φ_1 и φ_2 .

В рассматриваемой системе с двумя степенями свободы условие стационарности полной энергии приводит к двум уравнениям

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_1} = k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - P l_1 \varphi_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_2} = k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 \varphi_2 - P l_2 \varphi_2 = 0,$$

т. е. к той системе двух линейных однородных уравнений, которая получена в § 4:

$$k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - P l_1 \varphi_1 = 0; \quad (1.29)$$

$$k_2 \varphi_2 - k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - P l_2 \varphi_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, можно найти значения P_1 и P_2 , соответствующие двум точкам бифуркации, и конфигурации стержневой системы в окрестностях этих точек (см. рис. 1.15, б и в).

В приведенном решении (как и в решении, полученном выше с помощью линеаризованных уравнений) непосредственно не фигурировало условие устойчивости исходного состояния равновесия. Поэтому пока не понятно, почему при $P > P_1$ исходное состояние равновесия неустойчиво. Для доказательства того,

что при переходе через первую точку бифуркации исходное состояние равновесия перестает быть устойчивым, приведем другой вывод уравнений (1.29), основанный на теореме Лагранжа.

Согласно теореме Лагранжа, консервативная механическая система находится в состоянии устойчивого равновесия только тогда, когда ее полная потенциальная энергия минимальна. Таким образом, если система находится в устойчивом равновесии, то всякие допустимые по условиям закрепления системы отклонения приводят к увеличению ее полной потенциальной энергии.

Определим изменение полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, происходящее при переходе рассматриваемой системы к новому состоянию, смежному с исходным. Ограничившись квадратичными относительно φ_1 и φ_2 слагаемыми, из выражения (1.28) получим

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2 - \frac{1}{2} P (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2). \quad (1.30)$$

Если исходное состояние устойчиво, то при любых сочетаниях φ_1 и φ_2 должно выполняться условие $\Delta\mathcal{E} > 0$. Ненагруженная система при $P = 0$ находится в устойчивом исходном состоянии равновесия, так как $\Delta\mathcal{E} = U$, где U определяется из выражения (1.27). При любых не равных нулю отклонениях φ_1 и φ_2 условие $\Delta\mathcal{E} > 0$ выполняется.

Критической называют нагрузку $P_{кр}$, при превышении которой исходное состояние равновесия перестает быть устойчивым. Поэтому при $P > P_{кр}$ имеются отклонения, приводящие к $\Delta\mathcal{E} < 0$. Но при $P > P_{кр}$ возможны отклонения, приводящие к $\Delta\mathcal{E} > 0$ или к $\Delta\mathcal{E} = 0$. В соответствии с выражением (1.30) для тех отклонений, при которых $\Delta\mathcal{E} = 0$, можно записать следующее:

$$P = \frac{\frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2}{\frac{1}{2} (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2)}. \quad (1.31)$$

Критическую нагрузку можно определить как наименьшее значение нагрузки, при котором возможны отклонения от исходного состояния, приводящие к $\Delta\mathcal{E} = 0$. Нетрудно убедиться, что необходимое условие минимума нагрузки P , определяемой выражением (1.31), снова приводит к системе уравнений (1.29). Обозначим

$$P = \frac{U}{V}, \quad (1.32)$$

где $U = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2$, $V = \frac{1}{2} (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2)$.

Тогда необходимые условия минимума P запишутся так:

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} V - \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} U}{V^2} = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} V - \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} U}{V^2} = 0$$

или

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} - \frac{U}{V} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} \right) = 0;$$

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - \frac{U}{V} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} \right) = 0.$$

Так как $V > 0$, воспользовавшись выражением (1.32), можно записать

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} - P \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - P \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Как видим, снова получена система уравнений (1.29), определяющая точки бифуркации исходного состояния равновесия. Но теперь можно утверждать, что значение P_1 , соответствующее первой точке бифуркации, является критическим, т. е. в рассмотренной задаче $P_{кр} = \frac{k}{2l}$.

На рис. 1.17 схематично поясняются два варианта вывода уравнений (1.29). В первом варианте (рис. 1.17, а) использовали условие стационарности полной потенциальной энергии системы в состоянии равновесия, смежном с исходным. Во втором варианте (рис. 1.17, б) исследовали знак изменения полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ при отклонениях системы от исходного состояния равновесия. Оба варианта решения приводят к одной и той же критической точке бифуркации A_1 .

В рассматриваемой задаче система имеет две степени свободы и в соответствии с этим выше найдены две точки бифуркации. На рис. 1.18 показано изменение полной потенциальной энергии при отклонениях системы от исходного состояния равновесия. При $P < P_1 = P_{кр}$ полная потен-

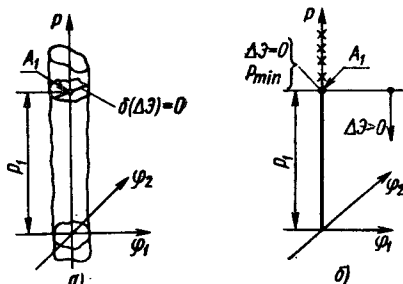


Рис. 1.17

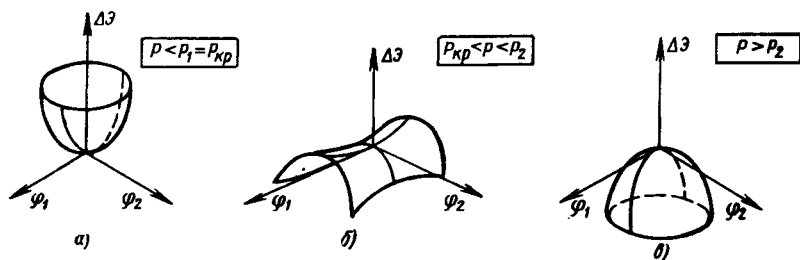


Рис. 1.18

циальная энергия минимальна и любые отклонения по φ_1 и φ_2 приводят к ее увеличению (рис. 1.18, а). При $P_{кр} < P < P_2$ исходное состояние равновесия соответствует точке седловина полной потенциальной энергии. Это состояние неустойчиво, поскольку возможны отклонения системы, приводящие к $\Delta\mathcal{E} < 0$ (рис. 1.18, б). При $P > P_2$ значение полной потенциальной энергии в исходном состоянии равновесия становится максимальным и любые отклонения системы приводят к $\Delta\mathcal{E} < 0$ (рис. 1.18, в).

Энергетический подход к определению точек бифуркации и критических нагрузок может быть применен и в более сложных случаях. Для систем с распределенными параметрами при $P > P_{кр}$ исходное состояние равновесия всегда соответствует точкам минимакса полной потенциальной энергии, т. е. при любых значениях $P > P_{кр}$ полная потенциальная энергия в исходном неустойчивом состоянии не становится максимальной.

§ 6. Устойчивость упругих систем при комбинированном нагружении

На упругую систему могут одновременно действовать несколько независимо изменяющихся нагрузок. Некоторые особенности исследования устойчивости при таком комбинированном нагружении продемонстрируем на простых примерах.

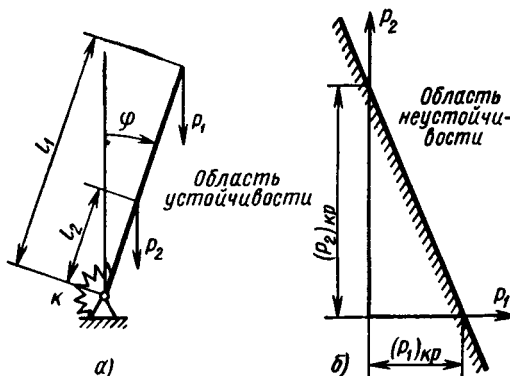


Рис. 1.19

Начнем с системы с одной степенью свободы. Рассмотрим закрепленный в упругом шарнире жесткий стержень, на который одновременно действуют силы P_1 и P_2 (рис. 1.19, а). Когда на стержень действует одна сила P_1 , то ее критическое значение

равно $(P_1)_{кр} = \frac{k}{l_1}$; аналогично $(P_2)_{кр} = \frac{k}{l_2}$. При одновременном действии сил P_1 и P_2 условие равновесия отклоненного стержня приводит к линеаризованному уравнению

$$(P_1 l_1 + P_2 l_2) \varphi = k \varphi.$$

Из условия существования отличных от нуля решений этого однородного уравнения находим границу области устойчивости

$$P_1 l_1 + P_2 l_2 = k. \quad (1.33)$$

Действительно, повторив рассуждения, приведенные в § 2, и проделав несложные выкладки, нетрудно установить, что при $P_1 l_1 + P_2 l_2 \leq k$ исходное вертикальное положение стержня устойчиво, а при $P_1 l_1 + P_2 l_2 > k$ это положение неустойчиво. В координатах P_1, P_2 граница области устойчивости (рис. 1.19, б) является прямой линией, пересекающей оси P_1 и P_2 в точках, соответствующих критическим значениям $(P_1)_{кр}$ и $(P_2)_{кр}$. Заметим, что в данном случае уравнение границы области устойчивости можно записать в виде

$$\frac{P_1}{(P_1)_{кр}} + \frac{P_2}{(P_2)_{кр}} = 1.$$

Если на систему с одной степенью свободы одновременно действуют N сил P_i , то граница области устойчивости, очевидно, описывается уравнением

$$\sum_{i=1}^N \frac{P_i}{(P_i)_{кр}} = 1, \quad (1.34)$$

где $(P_i)_{кр}$ — критическое значение силы P_i , [действующей отдельно].

Рассмотрим упругую систему с двумя степенями свободы, нагруженную одновременно силами P_1 и P_2 (рис. 1.20, а). Условия равновесия стержней в положении, отклоненном от исходного, приводят к системе двух линеаризованных уравнений

$$k(\varphi_1 - \varphi_2) - P_1 l \varphi_1 = 0;$$

$$2k\varphi_2 - P_1(l\varphi_1 + 2l\varphi_2) - P_2 2l\varphi_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой однородной системы уравнений, получим уравнение

$$P_1^2 + P_1 P_2 - \frac{5}{2} P_1 \frac{k}{l} - P_2 \frac{k}{l} + \left(\frac{k}{l}\right)^2 = 0. \quad (1.35)$$

Положив в этом уравнении поочередно $P_2 = 0$ и $P_1 = 0$, можно найти критические значения сил, действующих отдельно:

$$(P_1)_{кр} = \frac{1}{2} \frac{k}{l} \text{ и } (P_2)_{кр} = \frac{k}{l}.$$

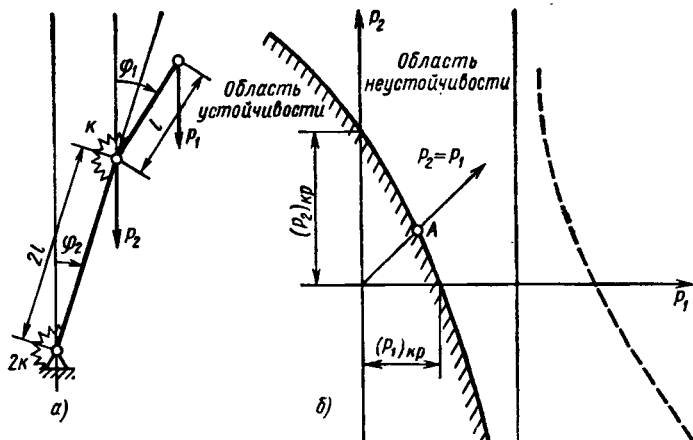


Рис. 1.20

На рис. 1.20, б в координатах P_1 , P_2 изображена гипербола, описываемая уравнением (1.35). Ближайшая к началу координат ветвь гиперболы, показанная сплошной линией, является границей области устойчивости в данной задаче. Следуя намеченному в предыдущем параграфе пути, можно доказать, что все точки плоскости, лежащие слева от этой ветви, соответствуют устойчивому вертикальному положению стержневой системы, а точки, лежащие справа, — неустойчивому вертикальному положению. В данной задаче (как и в предыдущей) граница принадлежит области устойчивости.

При нагружении силы P_1 и P_2 могут возрастать пропорционально одному параметру. В координатах P_1 , P_2 такое нагружение описывается лучом, исходящим из начала координат. Так, например, на рис. 1.20, б изображен луч, соответствующий $P_1 = P_2$. Точка пересечения луча с границей области устойчивости A соответствует критической точке бифуркации исходного положения равновесия.

В рассмотренных выше примерах граница области устойчивости незамкнутая кривая и поэтому часть лучей, исходящих

из начала координат, ее пересекает, а часть лучей не пересекает. В этих случаях возможны такие соотношения между силами P_1 и P_2 , при которых потери устойчивости не произойдет. Но бывают случаи нагружения упругой системы, когда граница области устойчивости является замкнутой кривой.

На рис. 1.21, а изображен упругий стержень с неподвижно

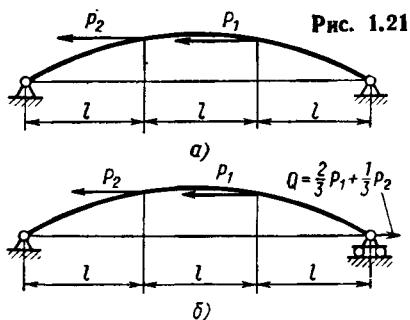


Рис. 1.21

закрепленными шарнирными торцами. При нагружении такого стержня силами P_1 и P_2 в правой опоре возникает продольная реакция $Q = \frac{2}{3}P_1 +$

$+\frac{1}{3}P_2$. Поэтому задача определения критических значений нагрузок стержня эквивалентна задаче устойчивости стержня, изображенного на рис. 1.21, б. Решение задач устойчивости такого типа рассмотрено в гл. 3. Для получения качественной картины заменим упругий стержень дискретной системой, состоящей из трех жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами (рис. 1.22, а). Для решения этой задачи воспользуемся энергетическим методом, изложенным в предыдущем параграфе. Обозначив поперечные перемещения шарниров v_1 и v_2 , определим изменение полной потенциальной энергии системы при отклонениях от горизонтального положения:

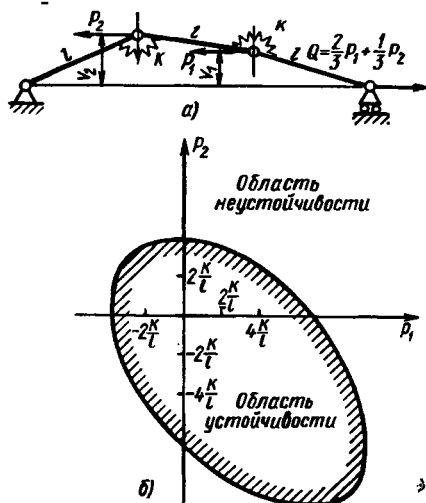


Рис. 1.22

энергетическим методом, изложенным в предыдущем параграфе. Обозначив поперечные перемещения шарниров v_1 и v_2 , определим изменение полной потенциальной энергии системы при отклонениях от горизонтального положения:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{k}{l^2} (2v_2 - v_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{l^2} (2v_1 - v_2)^2 - \frac{1}{2} P_2 \frac{v_2^2}{l} - \\ - \frac{1}{2} P_1 \frac{v_2^2}{l} - \frac{1}{2} P_1 \frac{(v_2 - v_1)^2}{l} + \frac{1}{2} Q \frac{[v_2^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_1^2]}{l},$$

где k — жесткость упругих шарниров.

Условие стационарности $\Delta \mathcal{E}$ приводит к двум однородным линейным уравнениям:

$$v_1 \left(5 \frac{k}{l} - P_1 + 2Q \right) - v_2 \left(4 \frac{k}{l} - P_1 + Q \right) = 0; \\ -v_1 \left(4 \frac{k}{l} - P_1 + Q \right) + v_2 \left(5 \frac{k}{l} - P_2 - 2P_1 + 2Q \right) = 0.$$

Приравняв нулю определитель полученной системы уравнений, найдем уравнение границы области устойчивости в координатах P_1, P_2 :

$$P_1^2 + P_2^2 + P_1 P_2 - 3P_1 \frac{k}{l} + 3P_2 \frac{k}{l} - 27 \left(\frac{k}{l} \right)^2 = 0. \quad (1.36)$$

Положив в этом уравнении $P_2 = 0$, получим уравнение для определения критических значений отдельно действующей силы P_1 :

$$P_1^2 - 3P_1 \frac{k}{l} - 27 \left(\frac{k}{l} \right)^2 = 0.$$

Вычислим два критических значения $(P_1)_{кр} = \frac{3}{2} \frac{k}{l} (1 \pm \sqrt{13})$. В силу симметрии задачи для силы P_2 можно найти два критических значения $(P_2)_{кр} = \frac{3}{2} \frac{k}{l} (-1 \pm \sqrt{13})$.

На рис. 1.22, б в координатах P_1, P_2 изображена граница области устойчивости. В данном случае область устойчивости ограничена замкнутой кривой (для дискретной модели стержня это эллипс). Вернувшись к исходной задаче устойчивости упругого стержня (см. рис. 1.21, а), нетрудно установить физический смысл замкнутости найденной границы области устойчивости: потерю устойчивости могут вызывать внешние силы P_1 и P_2 , действующие как вправо, так и влево.

Этот подход к определению границ областей устойчивости применим для более сложных упругих систем, в том числе для систем с распределенными параметрами. В общем случае граница области устойчивости может состоять из набора прямо- и криволинейных участков, часть из которых принадлежит области устойчивости, а часть — области неустойчивости.

Общие свойства границ областей устойчивости детально исследованы П. Ф. Папковичем [31]. В частности, им доказана важная теорема о выпуклости границы области устойчивости. Согласно этой теореме граница области устойчивости не может быть обращена выпуклостью к области устойчивости. Так, для случая действия на систему двух независимых нагрузок граница области устойчивости может состоять из криволинейных участков, обращенных выпуклостью к области неустойчивости, и отрезков прямых.

Теоремой о выпуклости области устойчивости часто пользуются для приближенного построения границы области устойчивости. Если известны только отдельные точки этой границы, то соединяя их отрезками прямых, можно получить надежную аппроксимацию истинной границы. (Когда на упругую систему одновременно действуют более двух независимых нагрузок, то аналогичные построения проводят в соответствующем многомерном пространстве).

Но необходимо подчеркнуть, что теорема о выпуклости области устойчивости (как и остальные теоремы П. Ф. Папковича о границах областей устойчивости) доказывается только для линейной задачи устойчивости. Эта теорема верна, если докритическое напряженно-деформированное состояние упругой системы определено по линейной теории и при расчете на устойчивость докритические перемещения системы не учитываются. В противном случае граница области устойчивости может иметь участки, обращенные выпуклостью в сторону области устойчивости [23]. Более того, в общем случае, когда для описания докритического состояния упругой системы необходимо использовать нелинейную теорию, области устойчивости могут иметь самые причудливые очертания.

§ 7. О постановке задач устойчивости тонкостенных систем

При исследовании упругой устойчивости стержней, пластин и оболочек принимаем следующие основные ограничения и допущения.

Во-первых, всюду, где это специально не оговорено, материал считаем линейно упругим (изотропным или анизотропным). Конечно, многие практически важные задачи устойчивости деформируемых тел требуют учета более сложных реологических свойств (нелинейная упругость, пластичность, ползучесть и т. д.). Но для тонкостенных элементов силовых конструкций из современных высокопрочных материалов это ограничение вполне обосновано. Как правило, работоспособность таких конструкций определяется их устойчивостью в упругой области. Кроме того, для правильной постановки и решения задач устойчивости деформируемых тел с другими реологическими свойствами необходимо понимать формулировки и решения задач устойчивости для линейно-упругого тела.

Во-вторых, все внешние нагрузки, действующие на деформируемую систему, считаем консервативными, т. е. полагаем, что работа этих нагрузок на любых допустимых перемещениях системы зависит только от начальной и конечной конфигураций системы. Наложённые на систему связи считаем идеальными, полагая, что силы реакций этих связей не совершают работу на любых возможных перемещениях точек системы, к которым приложены эти силы. При таких нагрузках и связях упругая система является консервативной.

В-третьих, при определении критических нагрузок и исследовании закритического поведения системы используем статический подход, не учитывая инерционные силы в системе, возникающие в процессе ее деформирования. Для консервативных систем такой статический подход к определению критических нагрузок всегда приводит к тем же результатам, что и более общий динамический подход [14, 40]. При исследовании закритического поведения статический подход дает возможность только найти устойчивые равновесные состояния, в которых может находиться система при определенном уровне нагружения, но не позволяет проследить во времени подробности закритического поведения системы после потери устойчивости (подробнее см. [18]). Однако для подавляющего числа практических задач расчета силовых конструкций достаточно найти условия, при которых произойдет потеря устойчивости, и оценить закритическое поведение конструкции, а эти цели могут быть достигнуты на основе статического подхода.

Кроме перечисленных общих ограничений, о которых следует помнить при практическом использовании той или иной конкретной формулы или уравнения, обсудим подробнее одно менее

известное допущение, на основе которого решается большинство задач теории упругой устойчивости тонкостенных конструкций.

Обратимся снова к классической задаче устойчивости шарнирно-опертого сжатого стержня (рис. 1.16). Как показано в § 4, линеаризованное уравнение изгиба такого стержня приводит к классической формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (1.37)$$

где EJ — изгибная жесткость стержня; l — длина.

При выводе этой формулы изменение размеров стержня в докритическом состоянии не учитывали; в частности, в момент потери устойчивости длину стержня l считали равной начальной длине l_0 .

Оценим порядок погрешности, содержащейся в формуле Эйлера и связанной с пренебрежением докритической деформацией стержня. В соответствии с законом Гука при упругом сжатии стержня $l = (1 + \varepsilon) l_0$, где $\varepsilon = -\frac{P}{EF}$; здесь E и F — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержня.

Критическую силу, подсчитанную по формуле (1.37) при начальных размерах стержня, обозначим $P_{кр}^0$. Тогда соответствующее критическое удлинение («укорочение») стержня равно

$$\varepsilon_{кр}^0 = -\frac{P_{кр}^0}{EF} = -\frac{\pi^2 EJ}{l_0^2 EF} = -\pi^2 \left(\frac{r_i}{l_0} \right)^2,$$

где $r_i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ — радиус инерции сечения стержня. С учетом изменения длины стержня можно записать следующее:

$$\begin{aligned} P_{кр} &= \frac{\pi^2 EJ}{[l_0 (1 + \varepsilon_{кр})]^2} = \frac{P_{кр}^0}{(1 + \varepsilon_{кр})^2} \approx (1 - 2\varepsilon_{кр}^0) P_{кр}^0 = \\ &= \left(1 + 2 \frac{\pi^2 r_i^2}{l_0^2} \right) P_{кр}^0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Так, для стержня квадратного поперечного сечения

$$r_i = \sqrt{\frac{a^4}{12} \frac{1}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}}; \quad P_{кр} \approx \left(1 + \frac{\pi^2 a^2}{6 l_0^2} \right) P_{кр}^0,$$

где a — сторона квадрата.

Следовательно, формула Эйлера органически содержит погрешность порядка $\varepsilon_{кр}^0$ или $\left(\frac{a}{l} \right)^2$ по сравнению с единицей. Заметим, что критическое укорочение $\varepsilon_{кр}^0$ не зависит от модуля упругости материала стержня, а является геометрической характеристикой стержня. Однако формула (1.38) в действительности не уточняет формулу Эйлера, а только дает оценку порядка погрешности, содержащейся в классическом решении. В процессе докритического сжатия изменяются не только длина стержня, но и размеры его поперечного сечения (за счет коэффициента

Пуассона). Поэтому, учитывая, что $J = (1 - \mu \varepsilon)^4 J_0$, формулу (1.38) можно записать в следующем виде:

$$P_{кр} = \frac{(1 - \mu \varepsilon_{кр})^4}{(1 + \varepsilon_{кр})^2} P_{кр}^0 \approx \left[1 + 2 \frac{\pi^2 r_0^2}{l_0^2} (1 + 2\mu) \right] P_{кр}^0.$$

В классическом решении внутренний изгибающий момент в стержне определяется зависимостью $M = EJv''$, основанной на гипотезе плоских сечений. Если построить решение, свободное от гипотезы плоских сечений, то полученная в результате такого решения дополнительная поправка для $P_{кр}$ будет тоже иметь порядок $\varepsilon_{кр}^0$, но знак этой поправки будет другой. Освобождение стержня от гипотезы плоских сечений делает его менее жестким и тем самым уменьшает критическую нагрузку (см. § 16).

Для получения окончательной достоверной поправки к формуле Эйлера необходимо пересмотреть закон Гука, учитывая при его формулировке различие между значениями условных и истинных напряжений и деформаций. И пока не внесена корректировка в закон Гука, учитывать все перечисленные выше поправки не имеет смысла.

На этом примере показана интересная и важная особенность задач устойчивости. Задачи устойчивости в принципе нелинейны. Классическую постановку задачи о точках бифуркации упругого равновесия можно рассматривать как первое приближение полной нелинейной задачи. Для дальнейшего уточнения классической постановки необходимо тщательно и всесторонне изучать все нелинейные факторы, которые могут оказать влияние на окончательный результат решения. Поэтому достоверные уточнения классической постановки задач устойчивости удастся сделать только для некоторых частных задач [11, 26].

Классическая постановка задач теории упругой устойчивости базируется на следующем допущении.

Докритическое напряженное состояние системы определяем по уравнениям линейной теории упругости и пренебрегаем изменением начальных размеров системы до потери устойчивости.

Это допущение (если не сделано специальной оговорки) используем при выводе линеаризованных уравнений стержней, пластин и оболочек, помня при этом, что все окончательные формулы для критических нагрузок неизбежно будут содержать погрешность порядка $\varepsilon_{кр}^0$ по сравнению с единицей.

Это основное допущение можно трактовать следующим образом. До потери устойчивости упругое тело напряжено, но не деформировано. Такая упрощенная модель упругого тела позволяет исследовать устойчивость большинства тонкостенных силовых конструкций, но не может рассматриваться как универсальная.

Для некоторых задач пренебрежение изменением начальных размеров системы или определение изменения размеров по уравнениям линейной теории упругости может привести к погрешностям, существенно большим указанных выше, или даже каче-

ственно исказить результат решения. Например, сжатая витая пружина может потерять устойчивость подобно сжатому гибкому стержню. В этом случае критическую силу можно определить по формуле для эквивалентного стержня

$$P_{кр} = C \frac{\pi^2 (EJ)_{пр}}{l^2}, \quad (1.39)$$

где C — коэффициент, отражающий способ закрепления торцов (см. § 13); $EJ_{пр}$ — жесткость эквивалентного стержня при изгибе; l — длина пружины. Но для получения правильного результата в этой формуле необходимо учесть докритическое обжатие пружины и принять, что $l = l_0 - \frac{P_{кр}}{k} = l_0 \left(1 - \frac{P_{кр}}{kl_0}\right)$, где l_0 — начальная длина пружины; k — жесткость пружины при сжатии.

Учитывая докритическое обжатие, из формулы (1.39) получаем кубическое уравнение для определения критической силы

$$P_{кр} \left(1 - \frac{P_{кр}}{kl_0}\right)^2 = C \frac{\pi^2 (EJ)_{пр}}{l_0^2}.$$

Если в формуле (1.39) принять $l = l_0$, то для витой пружины получим качественно неверный результат [30].

В отличие от задачи устойчивости сплошного стержня, где учет докритического изменения его длины без учета влияния остальных факторов не имел смысла, учет докритического обжатия пружины вполне логичен. Правда, для полной строгости решения необходимо показать, как докритическое обжатие влияет на значение $(EJ)_{пр}$.

Пренебрежение изменением начальной геометрии системы приводит к погрешностям, значительно превышающим погрешность порядка $\epsilon_{кр}$ по сравнению с единицей, в тех случаях, когда начальные деформации связаны с изгибом тонкостенной системы.

Более того, возможны случаи, когда пренебрежение начальными перемещениями, связанными с изгибом системы в докритическом состоянии, приводит к недопустимо большим погрешностям определения критической нагрузки. Например, если в задаче устойчивости сжатой в осевом направлении тонкой цилиндрической оболочки с малыми начальными неправильностями формы (см. гл. 6) не учитывать начальное напряженно-деформированное состояние, вызванное докритическим изгибом оболочки, то можно получить качественно неверный результат. Но тонкостенные элементы правильно спроектированных силовых конструкций в докритическом состоянии обычно работают без заметных изгибов. Изгиб таких элементов — это чаще всего результат потери устойчивости, вызывающий резкий рост напряжений и перемещений в конструкции и приводящий к частичной или полной потере ее работоспособности. Для расчета на устойчивость таких тонкостенных элементов допущение о пренебрежении изменением начальной геометрии вполне оправдано.

Энергетический метод решения задач устойчивости

В данной главе показано, как с помощью энергетического метода можно исследовать устойчивость упругих систем с распределенными параметрами.

Дано обоснование двух вариантов записи энергетического критерия устойчивости упругих тел: через начальные напряжения и непосредственно через внешние нагрузки. Кроме того, в главе изложены основы метода Рэля—Ритца и метода Галеркина применительно к задачам устойчивости упругих систем.

§ 8. Полная потенциальная энергия и условия равновесия упругого тела

Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругого тела и приложенных к нему внешних «мертвых» сил, т. е. сил, сохраняющих величину и направление при деформациях системы; тело считаем закрепленным таким образом, что его перемещения как жесткого целого исключены (рис. 2.1). Полная потенциальная энергия такой консервативной системы в нагруженном состоянии определяется суммой

$$\mathcal{E} = U + \Pi, \quad (2.1)$$

где U — потенциальная энергия деформации тела; Π — потенциал внешних сил.

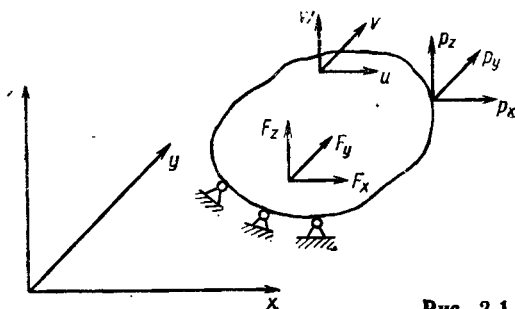


Рис. 2.1

Потенциальная энергия, накапливаемая линейно упругим телом при деформации, подсчитывается по выражению, известному из курса сопротивления материалов:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV, \quad (2.2)$$

где V — объем тела. В изотропном линейно-упругом теле компоненты напряжений и деформаций связаны законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z); & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_x + \sigma_y - \mu \sigma_z); & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_x - \mu \sigma_y + \sigma_z) & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона. Выразив напряжения через деформации, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_y; & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_z; & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, λ и G — упругие постоянные Ляме, связанные с E и μ соотношениями

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.5)$$

В частности, для двухосного напряженного состояния при $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y); \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Соотношения (2.4) позволяют представить выражение (2.2) в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right] dV. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В частном случае двухосного напряженного состояния при $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_V \left[\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dV. \quad (2.8)$$

Компоненты деформаций можно выразить через перемещения точек тела u , v , w (рис. 2.1). В линейной теории упругости компоненты деформаций связаны с производными от перемещений линейными зависимостями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставив эти зависимости в формулу (2.7), можно получить выражение внутренней энергии деформации тела в виде квадратичного положительно определенного функционала, зависящего от производных перемещений $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Потенциал мертвых объемных и поверхностных сил с точностью до постоянного слагаемого, которое всюду опущено, равен

$$\Pi = - \int_V (F_x u + F_y v + F_z w) dV - \int_{S_1} (p_x u + p_y v + p_z w) dS, \quad (2.10)$$

где первый интеграл берется по объему тела V , а второй — по той части поверхности тела S_1 , к которой приложены внешние поверхностные нагрузки. Знаки минус перед интегралами соответствуют тому случаю, когда объемные F_x , F_y , F_z и поверхностные силы p_x , p_y , p_z направлены так же, как и перемещения u , v , w . Следовательно, с ростом перемещений потенциал внешних сил уменьшается.

Согласно теореме Лагранжа состояние равновесия консервативной механической системы устойчиво тогда и только тогда, когда ее полная потенциальная энергия минимальна [40]. Необходимое условие минимума полной энергии записывается в виде **вариационного уравнения Лагранжа**

$$\delta \mathcal{E} = \delta U + \delta \Pi = 0. \quad (2.11)$$

Этим уравнением выражается условие стационарности полной потенциальной энергии механической системы в состоянии равновесия (не обязательно устойчивого!). Для того чтобы состояние

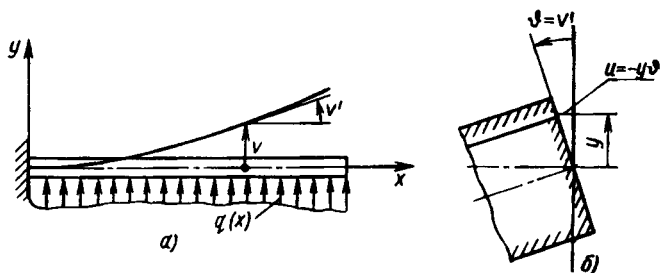


Рис. 2.2

равновесия было устойчиво, кроме уравнения (2.11) должно выполняться условие

$$\Delta \mathcal{E} > 0 \quad (2.12)$$

при любых возможных отклонениях системы от положения равновесия; откуда следует условие положительной определенности второй вариации полной потенциальной энергии системы (см. приложение II)

$$\delta^2 \mathcal{E} > 0. \quad (2.13)$$

Вариационное уравнение Лагранжа несет большую информацию: из него можно получить дифференциальные уравнения равновесия тела и те граничные условия, которые могут быть заданы на поверхности тела.

Рассмотрим задачу поперечного изгиба балки под действием распределенной нагрузки. Распределенная погонная нагрузка q направлена в сторону положительных перемещений v (рис. 2.2, а). Поэтому потенциал внешних сил

$$\Pi = - \int_0^l qv dx. \quad (2.14)$$

Согласно гипотезе плоских сечений (рис. 2.2, б) при изгибе балки осевые перемещения равны

$$u = -y\vartheta,$$

где y — координата, отсчитываемая от нейтральной оси балки; ϑ — угол поворота поперечного сечения. Относительная продольная деформация равна

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y\vartheta', \quad (2.15)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x . Согласно той же гипотезе углы сдвига γ_{xy} равны нулю и

$$\vartheta = v'. \quad (2.16)$$

Пренебрегая нормальными напряжениями σ_z и σ_y по сравнению с напряжениями σ_x , из выражения (2.2) и зависимостей закона Гука (2.3) получаем

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{E}{2} \int_V \epsilon_x^2 dx.$$

Заметим, что в это выражение не вошли касательные напряжения τ_{xy} , ибо по гипотезе плоских сечений $\gamma_{xy} = 0$. Подставим значение ϵ_x из формулы (2.15), тогда

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E \vartheta'^2 \left[\int_F y^2 dF \right] dx.$$

Интеграл, стоящий в квадратных скобках, берется по площади поперечного сечения и равен моменту инерции сечения балки J . Выразив угол поворота сечения ϑ через угол наклона касательной к упругой оси балки v' с помощью формулы (2.16), запишем

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v''^2 dx.$$

Итак, полная потенциальная энергия нагруженной балки равна

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ v''^2 - qv \right] dx. \quad (2.17)$$

Из вариационного уравнения Лагранжа (2.11) следует, что

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^l [EJ v'' \delta v'' - q \delta v] dx = 0.$$

Путем двукратного интегрирования по частям преобразуем определенный интеграл и получим

$$\delta \mathcal{E} = (EJ v'')' \delta v \Big|_0^l - (EJ v'') \delta v' \Big|_0^l + \int_0^l [(EJ v'')'' - q] \delta v dx = 0.$$

Откуда следует дифференциальное уравнение поперечного изгиба балки

$$(EJ v'')'' - q = 0, \quad (2.18)$$

а также возможные для этого уравнения граничные условия при $x = 0$ и $x = l$:

- 1) $EJ v'' = 0$ либо $\delta v' = 0$, т. е. $v' = \text{const}$;
- 2) $(EJ v'')' = 0$ либо $\delta v = 0$, т. е. $v = \text{const}$.

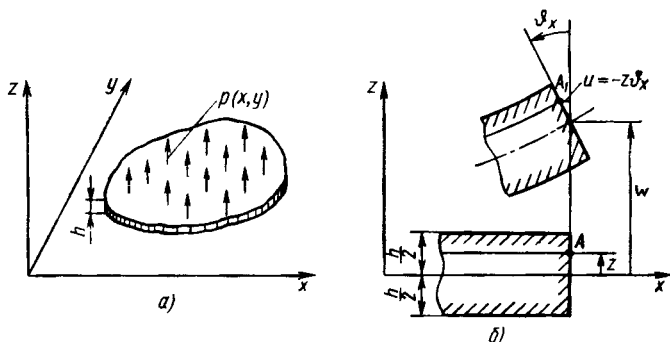


Рис. 2.3

Поскольку для балки $EJv'' = M$ и $(EJv'')' = Q$, где M — внутренний изгибающий момент, Q — внутренняя поперечная сила, граничные условия можно записать в следующем виде:

$$1) M = 0 \text{ либо } v' = \text{const};$$

$$2) Q = 0 \text{ либо } v = \text{const}.$$

Форма равновесия изогнутой балки устойчива, поскольку вторая вариация полной потенциальной энергии положительна:

$$\delta^2 \mathcal{E} = \int_0^l EJ (\delta v'')^2 dx > 0.$$

(Заметим, что если не ограничиться рассмотрением изгиба балки только в плоскости главного момента инерции и в число варьируемых перемещений включить закручивание балки вокруг ее оси и поперечное перемещение в плоскости, перпендикулярной плоскости действия нагрузки q , то можно обнаружить, что при некоторых условиях плоская форма изгиба балки становится неустойчивой).

В качестве второго примера рассмотрим задачу поперечного изгиба тонкой пластины. Пластину толщиной h отнесем к прямоугольной системе координат так, чтобы координатная плоскость xy совпала со срединной плоскостью пластины (рис. 2.3, а). При малых прогибах пластины ее срединную плоскость можно считать нерастяжимой.

Согласно основной гипотезе тонких пластин нормаль к недеформированной срединной плоскости при изгибе пластины не искривляется и остается нормалью к деформированной срединной поверхности пластины. При этом нормаль наклоняется в плоскости, параллельной координатной плоскости xz , на угол $\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ (рис. 2.3, б), и в плоскости, параллельной координат-

ной плоскости yz , на угол $\vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$. При наклоне нормали ее точка A , находящаяся на расстоянии z от срединной плоскости, получает перемещения

$$u = -z\vartheta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$v = -z\vartheta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Эти перемещения вызывают деформацию слоя пластины, отстоящего на расстоянии z от срединной плоскости. В соответствии с формулами (2.9) компоненты деформаций равны

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Пренебрегая нормальными напряжениями в площадках, параллельных срединной плоскости, напряженное состояние изогнутой пластины можно считать двухосным. Тогда по формуле (2.8) получим

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \left(\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \right) dx dy.$$

Проинтегрируем по толщине пластины, перегруппируем слагаемые в квадратных скобках и введем обозначение цилиндрической жесткости пластины $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$. Тогда

$$U = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (2.19)$$

Потенциал внешних сил, очевидно, равен

$$\Pi = - \iint p w dx dy,$$

где $p = p(x, y)$ — действующая на пластину распределенная поверхностная нагрузка.

Складывая U и Π , находим полную потенциальную энергию

$$\mathcal{E} = \iint \left[\frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} - p w \right] dx dy. \quad (2.20)$$

Из условия стационарности этого выражения можно получить дифференциальное уравнение изгиба пластины и те граничные условия, какие могут быть заданы на контуре пластины. Уравнение Эйлера для функционала энергии (2.20) имеет вид (см. приложение II)

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)} = 0,$$

где F — подинтегральное выражение в этом функционале.

В частности, для пластины постоянной толщины уравнение Эйлера принимает вид

$$\begin{aligned} -p + \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем уравнение поперечного изгиба тонкой пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - p(x, y) = 0, \quad (2.21)$$

где $\nabla^2 (*)$ — оператор Лапласа,

$$\nabla^2(*) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (*) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (*).$$

В задаче поперечного изгиба упругих пластин вместо уравнения Эйлера можно пользоваться вариационным уравнением Лагранжа (2.11). Тогда, выполнив действия, аналогичные тем, которые указаны для балки, можно получить уравнение (2.21) и граничные условия, которые могут быть заданы на контуре пластины. Такой путь исследования изгиба пластин подробно изложен, например, в работе [12].

§ 9. Вариационный принцип теории упругой устойчивости

В линейной теории упругости компоненты удлинений выражаются через перемещения точек тела с помощью линейных соотношений (2.9). Для решения задач устойчивости этих соотноше-

ний недостаточно, так как задачи устойчивости не линейны. Если в выражениях удлинений наряду с линейными относительно перемещений слагаемыми учесть квадратичные слагаемые, то для компонентов удлинений можно получить следующие нелинейные соотношения * [28]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Применим эти соотношения при исследовании устойчивости упругого тела, нагруженного системой мертвых сил (см. рис. 2.1). Для простоты рассуждений будем считать, что все внешние силы изменяются пропорционально одному параметру P , а наложенные связи исключают перемещения тела как жесткого целого.

Предположим, что состояние равновесия нагруженного тела, соответствующее решению линейной задачи, известно. Это состояние в дальнейшем будем называть начальным невозмущенным состоянием равновесия. Устойчивость равновесия этого состояния исследуем при следующих допущениях.

1. Начальное невозмущенное состояние равновесия тела описывается уравнениями линейной теории упругости.

2. Изменениями размеров и формы тела в начальном состоянии равновесия можно полностью пренебречь.

3. Зависимости закона Гука (2.3) справедливы не только для начального состояния, но и при малых отклонениях тела от начального состояния равновесия.

Вариационная формулировка условий устойчивости упругого тела может быть получена двумя различными способами (см. § 5). Первый способ основан на определении условий, при которых в окрестности начального невозмущенного состояния равновесия может существовать новое возмущенное состояние равновесия, т. е. на определении вариационным методом точек бифуркации начального состояния равновесия. Второй способ связан с непосредственным исследованием устойчивости начального состояния равновесия с помощью теоремы Лагранжа.

Рассмотрим первый способ. Перемещения точек тела в начальном невозмущенном состоянии равновесия будем считать известными и обозначим u_0, v_0, w_0 . Тогда перемещения, соответствующие новому возмущенному состоянию равновесия, равны

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u_1; & v &= v_0 + \alpha v_1; \\ w &= w_0 + \alpha w_1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

* Вывод таких нелинейных соотношений для тонких стержней, пластин и оболочек дан в следующих главах.

В новом состоянии равновесия компоненты деформаций выразим через перемещения (2.23) с помощью соотношений (2.22):

$$\gamma_{x\mu} = \gamma_{x\mu}^0 + \alpha \gamma_{x\mu}' + \alpha^2 \gamma_{x\mu}''; \quad (2.24)$$

где $\varepsilon_x^0, \dots, \gamma_{xy}^0, \dots$ — компоненты деформаций в начальном состоянии равновесия, определяемые линейными соотношениями (2.9):

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{\partial \omega_0}{\partial z}; \quad \gamma_{yz}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial \omega_0}{\partial y}.$$

Величины $\varepsilon'_x, \dots, \gamma'_{xy}, \dots$ линейно зависят от производных функций u_1, v_1, w_1 :

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad \gamma'_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x};$$

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial v_1}{\partial y}; \quad \gamma'_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}; \quad (2.26)$$

$$\varepsilon'_z = \frac{\partial w_1}{\partial z}; \quad \gamma'_{yz} = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y},$$

а величины $\epsilon''_x, \dots, \gamma''_{xy}, \dots$ — от квадратов производных u_1, v_1, w_1 ;

$$\varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right];$$

[illegible]

$$\gamma''_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y};$$

.....

Заметим, что выражения для $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \dots, \gamma'_{xy}, \dots$ имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}; \\ . &. \\ \gamma'_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \\ &\quad + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}; \\ . &. \end{aligned}$$

Поскольку в соответствии с принятым допущением (см. § 7) изменением размеров тела в докритическом состоянии равновесия пренебрегаем, вместо последних зависимостей получаем выражения (2.26). Таким образом, при исследовании устойчивости начального невозмущенного состояния принимаем такую модель: до потери устойчивости тело напряжено, но не деформировано.

Закон Гука считаем справедливым для состояний, смежных с начальным. Поэтому внутреннюю потенциальную энергию в новом возмущенном состоянии равновесия можно вычислить по формуле (2.7), подставив значения деформаций из (2.24). С точностью до слагаемых, имеющих множитель α^2 , получим

$$U = U_0 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2, \quad (2.28)$$

где U_0 — потенциальная энергия деформации тела в начальном состоянии равновесия,

$$U_0 = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[\varepsilon_x^{02} + \varepsilon_y^{02} + \varepsilon_z^{02} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0 + \varepsilon_z^0)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{02} + \gamma_{xz}^{02} + \gamma_{yz}^{02}) \right] dV; \quad (2.29)$$

$$U_1 = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[2(\varepsilon_x^0 \varepsilon'_x + \varepsilon_y^0 \varepsilon'_y + \varepsilon_z^0 \varepsilon'_z) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0 + \varepsilon_z^0) (\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z) + (\gamma_{xy}^0 \gamma'_{xy} + \right. \\ \left. + \gamma_{xz}^0 \gamma'_{xz} + \gamma_{yz}^0 \gamma'_{yz}) \right] dV; \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
 U_2 = & \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_z'^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z')^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}'^2 + \gamma_{xz}'^2 + \gamma_{yz}'^2) \Big] dV + \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[2(\varepsilon_x^0 \varepsilon_x'' + \varepsilon_y^0 \varepsilon_y'' + \varepsilon_z^0 \varepsilon_z'') + \right. \\
 & + \frac{2}{1-2\mu} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0 + \varepsilon_z^0) (\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'') + \\
 & \left. + (\gamma_{xy}^0 \gamma_{xy}'' + \gamma_{xz}^0 \gamma_{xz}'' + \gamma_{yz}^0 \gamma_{yz}'') \right] dV. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Потенциал внешних (мертвых) сил в новом возмущенном состоянии равновесия подсчитаем по общей формуле (2.10), учитывая зависимости (2.23):

$$\Pi = \Pi_0 + \alpha \Pi_1, \quad (2.32)$$

где Π_0 — потенциал внешних сил в начальном состоянии равновесия,

$$\Pi_0 = - \int_V (F_x u_0 + F_y v_0 + F_z w_0) dV - \int_{S_1} (p_x u_0 + p_y v_0 + p_z w_0) dS; \quad (2.33)$$

$$\Pi_1 = - \int_V (F_x u_1 + F_y v_1 + F_z w_1) dV - \int_{S_1} (p_x u_1 + p_y v_1 + p_z w_1) dS. \quad (2.34)$$

Полная потенциальная энергия равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \alpha (U_1 + \Pi_1) + \alpha^2 U_2, \quad (2.35)$$

где $\mathcal{E}_0 = U_0 + \Pi_0$ — полная потенциальная энергия в начальном состоянии.

Величина $\alpha (U_1 + \Pi_1)$ представляет собой первую специальную вариацию $\delta_* \mathcal{E}_0$ полной энергии в начальном состоянии равновесия, т. е. вариацию, при которой возможные перемещения δu , δv , δw совпадают с перемещениями $\alpha u(x, y, z)$, $\alpha v_1(x, y, z)$, $\alpha w_1(x, y, z)$ [15]. Поскольку такая вариация является частным случаем общей вариации, очевидно, $U_1 + \Pi_1 = 0$. Определим условия существования состояний равновесия, смежных с начальным невозмущенным состоянием. Новое возмущенное состояние является равновесным, если первая вариация полной потенциальной энергии в этом состоянии равна нулю, т. е.

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_0 + \alpha^2 \delta U_2 = 0. \quad (2.36)$$

Так как начальное состояние равновесно, $\delta \mathcal{E}_0 = 0$, и вариационное условие существования новых состояний равновесия, смежных с начальным, принимает вид

$$\delta U_2 = 0. \quad (2.37)$$

Величина $\alpha^2 U_2$ пропорциональна второй специальной вариации $\delta_*^2 \mathcal{E}_0$ (точнее, $\alpha^2 U_2 = \frac{1}{2} \delta_*^2 \mathcal{E}_0$). Поэтому условие (2.37) иногда формулируют в виде следующего вариационного принципа [15]. Для существования равновесных состояний, смежных с начальным состоянием равновесия, необходимо, чтобы вторая специальная вариация полной потенциальной энергии принимала стационарные значения, т. е.

$$\delta(\delta_*^2 \mathcal{E}_0) = 0. \quad (2.38)$$

Из этого вариационного принципа или вариационного критерия устойчивости можно найти собственные значения параметра

нагрузки P_n и собственные функции задачи, описывающие конфигурацию системы в момент перехода к новому возмущенному состоянию равновесия.

Для того чтобы выяснить, при каких значениях P начальное состояние устойчиво и при каких его значениях оно неустойчиво, можно воспользоваться вторым путем вывода, полученного выше вариационного принципа (см. § 5).

Согласно теореме Лагранжа исходное состояние равновесия устойчиво только тогда, когда полная потенциальная энергия имеет минимум. Таким образом, при любых возможных отклонениях системы в окрестности устойчивого состояния равновесия должно выполняться условие

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 > 0. \quad (2.39)$$

Критическим является такое значение параметра нагрузки $P_{кр}$, при превышении которого начальное состояние равновесия перестает быть устойчивым. Поэтому при $P > P_{кр}$ условие (2.39) для любых возможных отклонений не выполняется и, вообще говоря, имеются такие отклонения, при которых $\Delta \mathcal{E} = 0$. Следовательно, $P_{кр}$ можно разыскивать как нижнюю границу тех значений P , при которых возможны отклонения системы от начального состояния, приводящие к условию $\Delta \mathcal{E} = 0$.

Следует подчеркнуть, что при $P > P_{кр}$ полная потенциальная энергия начального состояния не становится максимальной, а только перестает быть минимальной. Поэтому при $P > P_{кр}$ кроме отклонений, приводящих к $\Delta \mathcal{E} < 0$, возможны отклонения, при которых $\Delta \mathcal{E} = 0$ и $\Delta \mathcal{E} > 0$.

Учитывая, что $\alpha(U_1 + \Pi_1) = \delta_* \mathcal{E}_0 = 0$, из выражения (2.35) получаем

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \alpha^2 U_2. \quad (2.40)$$

Обозначим

$$U_2 = W_2 + PV_2, \quad (2.41)$$

где

$$W_2 = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[\epsilon_x'^2 + \epsilon_y'^2 + \epsilon_z'^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_x' + \epsilon_y' + \epsilon_z')^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}'^2 + \gamma_{xz}'^2 + \gamma_{yz}'^2) \right] dV;$$

$$V_2 = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[2(\bar{\epsilon}_x^0 \epsilon_x'' + \bar{\epsilon}_y^0 \epsilon_y'' + \bar{\epsilon}_z^0 \epsilon_z'') + \right. \\ \left. + 2 \frac{\mu}{1-2\mu} (\bar{\epsilon}_x^0 + \bar{\epsilon}_y^0 + \bar{\epsilon}_z^0) (\epsilon_x'' + \epsilon_y'' + \epsilon_z'') + \right. \\ \left. + (\bar{\gamma}_{xy}^0 \gamma_{xy}'' + \bar{\gamma}_{xz}^0 \gamma_{xz}'' + \bar{\gamma}_{yz}^0 \gamma_{yz}'') \right] dV,$$

здесь $\bar{\epsilon}_x^0, \bar{\epsilon}_y^0, \dots, \bar{\gamma}_{xy}^0, \dots$ — компоненты деформаций начального состояния при $P = 1$. Тогда для тех отклонений, при которых $\Delta\mathcal{E} = 0$, можно записать

$$P = -\frac{W_2}{V_2}. \quad (2.42)$$

Нетрудно убедиться, что условие минимума P , определяемого этой зависимостью, снова приводит к вариационному уравнению (2.37), эквивалентному (2.38). Действительно, из условия

$$\delta P = \delta \left(-\frac{W_2}{V_2} \right) = 0$$

получаем

$$\frac{\delta W_2 V_2 - \delta V_2 W_2}{V_2^2} = \frac{1}{V_2} \left(\delta W_2 - \frac{W_2}{V_2} \delta V_2 \right) = 0.$$

С учетом зависимостей (2.42) и (2.41) последнее равенство приводит к вариационному уравнению (2.37). Теперь становится ясным, что первое собственное значение параметра нагрузки P_1 , определяемое из этого уравнения, совпадает с нижней границей значений P , определяемых зависимостью (2.42), поэтому $P_1 = P_{кр}$.

Из изложенного вытекает практическое правило, обычно используемое при определении критических нагрузок.

Для определения критического значения параметра нагрузки $P_{кр}$ нужно подсчитать изменение полной потенциальной энергии системы $\Delta\mathcal{E}$ с точностью до квадратов перемещений, описывающих переход системы в новое, отклоненное состояние, смежное с начальным состоянием равновесия, устойчивость которого исследуется. Собственные значения параметра нагрузки P_n можно найти либо из условия стационарности $\Delta\mathcal{E}$

$$\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0, \quad (2.43)$$

либо из условия

$$\Delta\mathcal{E} = 0 \quad (2.44)$$

при дополнительном условии минимума параметра нагрузки P . Первое собственное значение P_1 равно критическому значению $P_{кр}$, а первая собственная функция задачи описывает конфигурацию системы в момент потери устойчивости.

Формулу для $\Delta\mathcal{E}$ можно преобразовать, выразив слагаемое V_2 не через начальные удлинения, а через начальные напряжения. Воспользовавшись зависимостями закона Гука (3.3), получим

$$V_2 = \int_V (\bar{\sigma}_x^0 \bar{\epsilon}_x'' + \bar{\sigma}_y^0 \bar{\epsilon}_y'' + \bar{\sigma}_z^0 \bar{\epsilon}_z'' + \bar{\tau}_{xy}^0 \bar{\gamma}_{xy}'' + \bar{\tau}_{xz}^0 \bar{\gamma}_{xz}'' + \bar{\tau}_{yz}^0 \bar{\gamma}_{yz}'') dV,$$

где $\bar{\sigma}_x^0, \dots, \bar{\tau}_{xy}^0, \dots$ — компоненты начальных напряжений при $P = 1$. Выражение для $\Delta\mathcal{E}$ перепишем еще раз, опустив множитель α^2 :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} = & \frac{E}{2(1+\mu)} \int_V \left[\epsilon'_x{}^2 + \epsilon'_y{}^2 + \epsilon'_z{}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon'_x + \epsilon'_y + \epsilon'_z)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\gamma'_{xy}{}^2 + \gamma'_{xz}{}^2 + \gamma'_{yz}{}^2) \left. \right] dV + P \int_V (\bar{\sigma}_x^0 \epsilon''_x + \bar{\sigma}_y^0 \epsilon''_y + \\ & + \bar{\sigma}_z^0 \epsilon''_z + \bar{\tau}_{xy}^0 \gamma''_{xy} + \bar{\tau}_{xz}^0 \gamma''_{xz} + \bar{\tau}_{yz}^0 \gamma''_{yz}) dV. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Начальные напряжения $\bar{\sigma}_x^0, \bar{\sigma}_y^0, \dots$ должны быть предварительно определены из решения линейной задачи для начального невозмущенного состояния равновесия тела. Удлинения $\epsilon'_x, \epsilon'_y, \dots$ и $\epsilon''_x, \epsilon''_y, \dots$ подсчитываем по формулам (2.26) и (2.27).

Если по зависимостям закона Гука (2.4) ввести величины

$$\sigma'_x = \lambda \epsilon' + 2G \epsilon'_x; \quad \tau'_{xy} = G \gamma'_{xy};$$

$$\sigma'_y = \lambda \epsilon' + 2G \epsilon'_y; \quad \tau'_{xz} = G \gamma'_{xz};$$

$$\sigma'_z = \lambda \epsilon' + 2G \epsilon'_z; \quad \tau'_{yz} = G \gamma'_{yz},$$

то выражение (2.45) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_V (\sigma'_x \epsilon'_x + \sigma'_y \epsilon'_y + \sigma'_z \epsilon'_z + \tau'_{xy} \gamma'_{xy} + \tau'_{xz} \gamma'_{xz} + \tau'_{yz} \gamma'_{yz}) dV + \\ & + P \int_V (\bar{\sigma}_x^0 \epsilon''_x + \bar{\sigma}_y^0 \epsilon''_y + \bar{\sigma}_z^0 \epsilon''_z + \bar{\tau}_{xy}^0 \gamma''_{xy} + \bar{\tau}_{xz}^0 \gamma''_{xz} + \bar{\tau}_{yz}^0 \gamma''_{yz}) dV. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Вариационное условие (2.43) или (2.44), выраженное через начальные напряжения $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \dots, \tau_{xy}^0, \dots$ с помощью зависимостей типа (2.45) или (2.46), назовем **энергетическим критерием устойчивости (вариационным принципом) в форме Брайана**.

Из выражения (2.45) следует, что при $P = 0$ состояние равновесия тела всегда устойчиво, поскольку первый интеграл этого выражения больше нуля при любых комбинациях отклонений u_1, v_1, w_1 . Величина $\Delta\mathcal{E}$ может обратиться в нуль и начальное состояние равновесия может стать неустойчивым только при значениях P , превышающих некоторое критическое значение $P_{кр}$.

Оценим порядок значений начальных напряжений и деформаций, при которых это может произойти. Сравнивая формулы (2.26) и (2.27), видим, что порядок ϵ'' равен порядку ϵ'^2 . Тогда из зависимости (2.45) следует, что для того чтобы $\Delta\mathcal{E}$ могло обратиться в нуль, порядок значений начальных напряжений $\sigma_x^0 = P \bar{\sigma}_x^0, \dots, \tau_{xy}^0 = P \bar{\tau}_{xy}^0$ должен быть такой же, как у модуля упругости. Другими словами, для того чтобы начальное состояние равновесия изотропного упругого тела перестало быть устойчи-

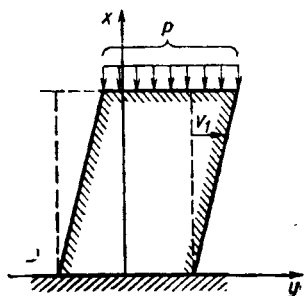


Рис. 2.4

вым, начальные деформации в нем должны быть порядка единицы. В этом случае все изложенное выше становится неверным, поскольку при выводе основных соотношений начальные деформации считали пренебрежимо малыми по сравнению с единицей.

Известны два исключения, при которых нарушается приведенная общая оценка значений критических деформаций. Это тела с резко выраженной анизотропией упругих свойств и тонкостенные тела (стержни, пластины, оболочки).

На рис. 2.4 изображен параллелепипед из анизотропного материала, равномерно сжатый вдоль оси x . Начальное напряженное состояние считаем одноосным, причем $\sigma_x^0 = -\frac{P}{F}$, где F — площадь поперечного сечения параллелепипеда. Материал обладает настолько резко выраженной анизотропией, что $\frac{G_{xy}}{E_x} \ll 1$, где G_{xy} и E_x — соответственно модуль сдвига в плоскости xy и модуль упругости в направлении оси x . У такого параллелепипеда возможна сдвиговая форма потери устойчивости в плоскости xy при малых начальных деформациях $\epsilon_x^0 = \frac{\sigma_x^0}{E_x}$. Перемещения при этой форме потери устойчивости зададим в виде $v_1 = Ax$; $u_1 = 0$; $w_1 = 0$. Согласно зависимости (2.46) имеем *

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \tau'_{xy} \gamma'_{xy} dV + \int_V \sigma_x^0 \epsilon''_x dV.$$

По формулам (2.26) и (2.27) определяем

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial v_1}{\partial x} = A;$$

$$\epsilon''_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} A^2.$$

Учитывая зависимость закона Гука $\tau'_{xy} = G_{xy} \gamma'_{xy}$, можно записать

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} A^2 G_{xy} V + \frac{1}{2} \sigma_x^0 A^2 V,$$

где V — объем параллелепипеда.

Из условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ следует, что критические напряжения

$$(\sigma_x^0)_{кр} = -G_{xy}.$$

* Зависимость (2.46) получена для изотропного упругого тела, но нетрудно показать, что она справедлива и для анизотропного тела.

Как видим, абсолютное значение критических сжимающих напряжений не зависит от размеров тела и равно модулю сдвига в плоскости xu . В силу принятого допущения о резко выраженной анизотропии упругих свойств потеря устойчивости происходит при малых абсолютных значениях начальных деформаций

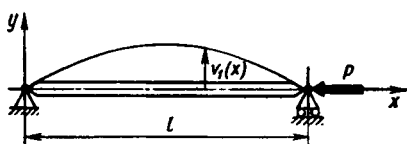


Рис. 2.5

$$|(\epsilon_x^0)_{кр}| = \left| \frac{(\sigma_x^0)_{кр}}{E_x} \right| = \frac{G_{xy}}{E_x} \ll 1.$$

В качестве второго примера рассмотрим шарнирно-опертый прямой стержень, сжатый силой P (рис. 2.5). Как и в предыдущем примере, начальное напряженное состояние считаем одноосным: $\sigma_x^0 = -\frac{P}{F}$, где F — площадь поперечного сечения стержня.

Изгибное состояние равновесия стержня, смежное с начальным, опишем с помощью обычной гипотезы плоских сечений (см. § 8). Тогда, положив для простоты коэффициент Пуассона $\mu = 0$, можно записать $v_1 = v_1(x)$; $u_1 = -y \frac{dv_1(x)}{dx}$; $w_1 = 0$.

В данном случае согласно зависимости (2.46) имеем

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon'_x \sigma'_x dV + \int_V \sigma_x^0 \epsilon''_x dV.$$

По формулам (2.26) и (2.27) находим

$$\epsilon'_x = -y \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2};$$

$$\epsilon''_x = \frac{1}{2} \left[y^2 \left(\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{dv_1(x)}{dx} \right)^2 \right].$$

По закону Гука $\sigma'_x = E \epsilon'_x$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_V E y^2 \left(\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \right)^2 dV + \\ &+ \int_V \frac{\sigma_x^0}{2} \left[y^2 \left(\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{dv_1(x)}{dx} \right)^2 \right] dV. \end{aligned}$$

После интегрирования по площади поперечного сечения стержня получим

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_x^0 \left[J \left(\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \right)^2 + F \left(\frac{dv_1(x)}{dx} \right)^2 \right] dx, \quad (2.47)$$

где $J = \int_F y^2 dF$ — момент инерции поперечного сечения.

Потеря устойчивости шарнирно-опертого стержня происходит по одной полуволне синусоиды (см. § 5), поэтому положим $v_1(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}$.

Тогда из выражения (2.47) следует, что

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{l}{2} EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 A^2 + \frac{1}{2} \frac{l}{2} \sigma_x^0 F \left[\left(\frac{\pi r_i}{l} \right)^2 + 1 \right] \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 A^2,$$

где $r_i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ — радиус инерции поперечного сечения.

Для тонких стержней можно считать $(r_i/l)^2 \ll 1$, поэтому первым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с единицей и из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ получить значение Эйлеровой критической силы $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Опуская знак, подсчитаем относительное удлинение (укорочение) стержня, соответствующее $P_{кр}$:

$$\varepsilon_{кр}^0 = \frac{P_{кр}}{EF} = \frac{\pi^2 EJ}{EF l^2} = \frac{\pi^2 r_i^2}{l^2}.$$

Для тонких стержней $(r_i/l)^2 \ll 1$ и критическая деформация действительно оказывается малой. Следует еще раз подчеркнуть, что критическая деформация $\varepsilon_{кр}^0$ является геометрической характеристикой стержня, не зависящей от модуля упругости материала.

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Из приведенного вывода формулы Эйлера $P_{кр} = \frac{\pi^2 EF}{l^2}$ следует, что эта формула органически содержит погрешность порядка $\left(\frac{\pi r_i}{l} \right)^2 = \varepsilon_{кр}^0$ по сравнению с единицей. Эти выводы сделаны в § 7 без помощи энергетического критерия устойчивости. Погрешности того же типа содержатся во всех формулах для критических нагрузок тонкостенных упругих систем, если при выводе формул начальные деформации считают пренебрежимо малыми по сравнению с единицей.

§. 10. Энергетический критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко

Для записи энергетического критерия устойчивости в форме Брайана предварительно требуется определить начальные напряжения в упругом теле. При решении некоторых задач устойчивости иногда оказывается удобным записать энергетический критерий в другой форме, не содержащей непосредственно начальных напряжений невозмущенного состояния равновесия [6]. Покажем, как это можно сделать.

Устойчивость равновесия упругого тела, нагруженного системой мертвых сил, исследуем при допущениях, которые использованы в § 9. Для описания возмущенного состояния равновесия, смежного с начальным невозмущенным состоянием, снова воспользуемся бесконечно малым параметром α , не зависящим от координат. Но теперь отклонения точек тела от их начальных положений будем определять с точностью до α^2 включительно. Тогда для перемещений точек тела в новом отклоненном состоянии можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2; \\ v &= v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2; \\ w &= w_0 + \alpha w_1 + \alpha^2 w_2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $u_0 = u_0(x, y, z)$; $v_0 = v_0(x, y, z)$; $w_0 = w_0(x, y, z)$ — перемещения точек тела в начальном невозмущенном состоянии равновесия; $u_1 = u_1(x, y, z)$; $v_1 = v_1(x, y, z)$; $w_1 = w_1(x, y, z)$; $u_2 = u_2(x, y, z)$; $v_2 = v_2(x, y, z)$; $w_2 = w_2(x, y, z)$ — конечные функции координат.

Компоненты деформаций в новом возмущенном состоянии равновесия подсчитываем с точностью до слагаемых, имеющих множитель α^2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + \alpha \varepsilon'_x + \alpha^2 \varepsilon''_x; \\ . &. \\ . &. \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + \alpha \gamma'_{xy} + \alpha^2 \gamma''_{xy} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Компоненты деформаций в начальном состоянии $\epsilon_x^0, \dots, \gamma_{xy}^0, \dots$ определяем по формулам (2.25), компоненты деформаций $\epsilon_x', \dots, \gamma_{xy}', \dots$, линейно зависящие от производных функций $u_1,$

где

$$\Delta \mathcal{E} = U_2 + P_2.$$

Причем в выражение для $\Delta \mathcal{E}$ входят перемещения u_2 , v_2 , w_2 . Используя зависимость (2.45) и формулы (2.50), из этого выражения можно выделить слагаемые, содержащие перемещения u_2 , v_2 , w_2 . Тогда получим $\Delta \mathcal{E} = A_1 + A_2$, где

$$\begin{aligned} A_2 = & \int_V \left[\sigma_x^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sigma_y^0 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \sigma_z^0 \frac{\partial w_2}{\partial z} + \tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \tau_{xz}^0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \tau_{yz}^0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \right] dV - \\ & - \int_V (F_x u_2 + F_y v_2 + F_z w_2) dV - \int_{S_1} (p_x u_2 + p_y v_2 + p_z w_2) dS. \end{aligned}$$

В значение A_1 включены все остальные слагаемые, не зависящие от перемещений u_2 , v_2 , w_2 .

Величину A_2 можно рассматривать как такую вариацию полной потенциальной энергии $\delta_*(\mathcal{E}_0)$, когда возможные перемещения совпадают с перемещениями u_2 , v_2 , w_2 . Поскольку начальное состояние равновесно, $A_2 = 0$ при любых перемещениях u_2 , v_2 , w_2 , совместимых с наложенными на тело связями. В частности, положив перемещения u_2 , v_2 , w_2 равными нулю, из выражения (2.56) вновь получим выражение для энергетического критерия устойчивости в форме Брайана.

Перемещения u_2 , v_2 , w_2 можно подобрать так, чтобы из выражения $\Delta \mathcal{E}$ исключить начальные напряжения σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 , ...

Используя зависимости закона Гука (2.4), введем величины

$$\sigma_x'' = \lambda (\epsilon_x'' + \epsilon_y'' + \epsilon_z'') + 2G\epsilon_x''; \quad \tau_{xy}'' = G\gamma_{xy}'';$$

$$\sigma_y'' = \lambda (\epsilon_x'' + \epsilon_y'' + \epsilon_z'') + 2G\epsilon_y''; \quad \tau_{xz}'' = G\gamma_{xz}'';$$

$$\sigma_z'' = \lambda (\epsilon_x'' + \epsilon_y'' + \epsilon_z'') + 2G\epsilon_z''; \quad \tau_{yz}'' = G\gamma_{yz}''.$$

Тогда выражение (2.31) для U_2 можно преобразовать к виду

$$U_2 = W_2 + V_2, \quad (2.57)$$

где

$$V_2 = \int_V (\sigma_x'' \epsilon_x^0 + \sigma_y'' \epsilon_y^0 + \sigma_z'' \epsilon_z^0 + \tau_{xy}'' \gamma_{xy}^0 + \tau_{xz}'' \gamma_{xz}^0 + \tau_{yz}'' \gamma_{yz}^0) dV.$$

Как и в выражении (2.41), W_2 непосредственно не зависит от начальных напряжений или деформаций.

Для дальнейших преобразований воспользуемся обычными формулами интегрирования по частям объемных интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dV = \\ & = \int_S (f_1 \varphi n_x + f_2 \varphi n_y + f_3 \varphi n_z) dS - \int_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \varphi + \frac{\partial f_2}{\partial y} \varphi + \frac{\partial f_3}{\partial z} \varphi \right) dV, \end{aligned}$$

где n_x, n_y, n_z — компоненты вектора внешней единичной нормали к недеформированной поверхности рассматриваемого тела.

Выразив компоненты начальных деформаций $\epsilon_x^0, \dots, \gamma_{xy}^0, \dots$ согласно формулам (2.25) через начальные перемещения u_0, v_0, w_0 , получим

$$\begin{aligned} V_2 = \int_V & \left[\sigma_x'' \frac{\partial u_0}{\partial x} + \sigma_y'' \frac{\partial v_0}{\partial y} + \sigma_z'' \frac{\partial w_0}{\partial z} + \tau_{xy}'' \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \tau_{xz}'' \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \tau_{yz}'' \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (2.58)$$

После интегрирования по частям это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} V_2 = \int_S & (p_x'' u_0 + p_y'' v_0 + p_z'' w_0) dS - \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial z} \right) u_0 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial z} \right) v_0 + \left(\frac{\partial \sigma_z''}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial y} \right) w_0 \right] dV, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_x'' &= \sigma_x'' n_x + \tau_{xy}'' n_y + \tau_{xz}'' n_z; \\ p_y'' &= \tau_{xy}'' n_x + \sigma_y'' n_y + \tau_{yz}'' n_z; \\ p_z'' &= \tau_{xz}'' n_x + \tau_{yz}'' n_y + \sigma_z'' n_z. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Теперь из выражения для V_2 исключим начальные перемещения. Для этого достаточно потребовать, чтобы во всем объеме тела выполнялись уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z''}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

На той части поверхности тела S_1 , для которой в явном виде заданы поверхностные нагрузки p_x, p_y, p_z , должны выполняться условия

$$p_x'' = 0; p_y'' = 0; p_z'' = 0. \quad (2.61)$$

Перемещения u_2, v_2, w_2 должны быть совместимы с наложенными на тело связями, поэтому на той части поверхности тела S_2 , для которой в явном виде заданы начальные перемещения $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{w}_0$, всегда должны выполняться условия

$$u_2 = 0; v_2 = 0; w_2 = 0. \quad (2.62)$$

При выполнении всех перечисленных условий выражение (2.58) для V_2 приводится к виду

$$V_2 = \int_{S_2} (p'_x \tilde{u}_0 + p'_y \tilde{v}_0 + p'_z \tilde{w}_0) dS.$$

Причем интегрирование производится только на той части поверхности тела S_2 , для которой перемещения $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{w}_0$ заданы в явном виде.

Выражение (2.57) можно записать в следующем виде:

$$U_2 = W_2 + \int_{S_2} (p'_x \tilde{u}_0 + p'_y \tilde{v}_0 + p'_z \tilde{w}_0) dS.$$

С учетом выражения (2.54) для Π_2 изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ можно представить так:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = & W_2 + \int_{S_2} (p'_x \tilde{u}_0 + p'_y \tilde{v}_0 + p'_z \tilde{w}_0) dS - \\ & - \int_{S_1} (p_x u_2 + p_y v_2 + p_z w_2) dS - \int_V (F_x u_2 + F_y v_2 + F_z w_2) dV, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где

$$\begin{aligned} W_2 = & \frac{Ei}{2(1+\mu)} \int_V \left[(\epsilon'_x{}^2 + \epsilon'_y{}^2 + \epsilon'_z{}^2) + \frac{\mu}{1+2\mu} (\epsilon'_x + \epsilon'_y + \epsilon'_z)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\gamma'^2_{xy} + \gamma'^2_{xz} + \gamma'^2_{yz}) \right] dV. \end{aligned}$$

Причем входящие в выражение (2.63) перемещения u_2, v_2, w_2 не произвольны, а подчинены условиям (2.60)—(2.62).

Энергетический критерий устойчивости

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0 \text{ (или } \Delta \mathcal{E} = 0 \text{ при } P = P_{\min}),$$

где изменение полной потенциальной энергии подсчитывается по формуле (2.63), назовем энергетическим критерием в форме С. П. Тимошенко.

Те условия, которые были наложены на перемещения u_2, v_2, w_2 с целью исключения из выражения для $\Delta \mathcal{E}$ начальных напряжений и деформаций, можно трактовать следующим образом.

Во-первых, величины $\alpha^2 \sigma''_x, \dots, \alpha^2 \tau''_{xy}, \dots$, где $\sigma''_x, \dots, \tau''_{xy}, \dots$ связаны с $\epsilon''_x, \dots, \gamma''_{xy}, \dots$ законом Гука, можно рассматривать как

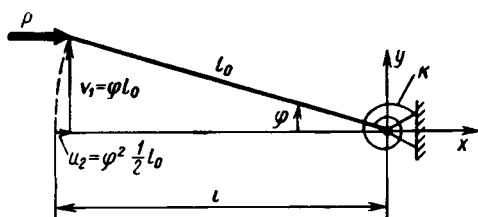


Рис. 2.6

с помощью формул (2.59), можно считать нагрузками второго порядка малости, возникающими на поверхности при переходе тела в новое состояние.

Во-вторых, уравнения (2.60) можно рассматривать как условия самоуравновешенности напряжений второго порядка малости. Условия (2.61) можно трактовать как граничные условия на той части поверхности тела S_1 , для которой заданы мертвые внешние нагрузки p_x, p_y, p_z . Поскольку при переходе в новое возмущенное состояние внешние нагрузки остаются неизменными, дополнительные поверхностные нагрузки второго порядка малости на части поверхности S_1 равны нулю. Дополнительные поверхностные нагрузки $\alpha^2 p_x'', \alpha^2 p_y'', \alpha^2 p_z''$ на части поверхности S_2 можно рассматривать как дополнительные реакции связей, возникающие при переходе тела в новое состояние.

Переход от энергетического критерия в форме Брайана к энергетическому критерию в форме С. П. Тимошенко можно рассматривать и как формальный переход от одного функционала к другому, осуществляемый с помощью преобразований типа Фридрихса [16]. Но изложенная трактовка энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко имеет следующие основания. Во-первых, для схематизированных механических систем типа абсолютно жестких стержней, соединенных упругими шарнирами, или стержней и колец с нерастяжимой осью такая трактовка наиболее естественна. Вернемся, например, к рассмотренной в гл. I простейшей системе с одной степенью свободы и исследуем ее устойчивость с помощью общего энергетического критерия. Если воспользоваться энергетическим критерием в форме С. П. Тимошенко, то в соответствии с (2.63) можно записать (рис. 2.6)

$$\Delta \mathcal{E} = W_2 - P u_2,$$

где $W_2 = \frac{1}{2} k \varphi^2$; $u_2 = \frac{1}{2} l_0 \varphi^2$.

При этом можно считать, что роль параметра α , фигурирующего в (2.48), играет угол φ . Условие $\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} k \varphi^2 - P \frac{1}{2} l_0 \varphi^2 = 0$ приводит к критическому значению силы $P_{кр} = \frac{k}{l}$.

Энергетический критерий устойчивости в форме Брайана, в котором изменение полной потенциальной энергии системы

компоненты напряжений второго порядка малости, возникающих при переходе тела из начального невозмущенного состояния в новое возмущенное состояние, описываемое перемещениями (2.48). Тогда величины $\alpha^2 p_x'', \alpha^2 p_y'', \alpha^2 p_z''$, введенные

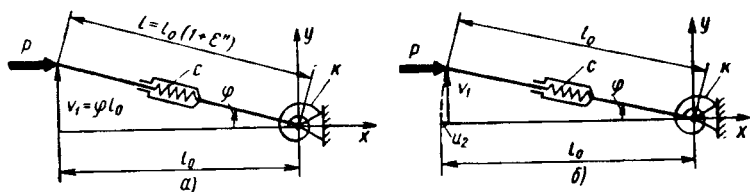


Рис. 2.7

выражается через начальные напряжения или удлинения, применить к рассматриваемой системе нельзя: стержень считается абсолютно жестким и при нагружении энергия в нем не аккумулируется.

Для того чтобы при подсчете изменения полной потенциальной энергии воспользоваться зависимостями типа (2.45) или (2.46), необходимо ввести в рассматриваемую систему дополнительный упругий элемент, аккумулирующий энергию в докритическом состоянии равновесия. Роль такого элемента может играть пружина жесткости c (рис. 2.7). Причем в соответствии с принятыми выше ограничениями жесткость пружины должна быть достаточно большой, чтобы можно было пренебречь изменением длины стержня в докритическом состоянии.

Рассматривая перемещения только первого порядка малости (рис. 2.7, а), соответствующие выражениям (2.23), для подсчета изменения полной потенциальной энергии можно воспользоваться зависимостью типа (2.45):

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} k \varphi_1^2 + N_0 \varepsilon'' l_0,$$

где $N_0 = -P$; $\varepsilon'' = \frac{1}{2} \varphi_1^2$.

Окончательный результат конечно такой же, как при решении задачи с помощью энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко. При этом критическая сила не зависит от жесткости пружины c , как Эйлера критическая сила для сжатого стержня не зависит от жесткости стержня на растяжение. Для сравнения на рис. 2.7, б показан стержень с пружиной жесткости c , отклоненный в соответствии с записью энергетического критерия устойчивости в форме С. П. Тимошенко.

Аналогично в случае, когда рассматривается устойчивость шарнирно-опертого стержня, сжатого силой P , и ось стержня считается нерастяжимой, энергетический критерий устойчивости записывают в форме С. П. Тимошенко (рис. 2.8, б):

$$\Delta \mathcal{E} = W_2 - P u_2(-l),$$

где $W_2 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v_1}{dx^2} \right)^2 dx$; $u_2(-l) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_1}{dx} \right)^2 dx$.

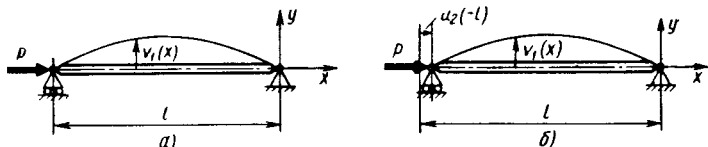


Рис. 2.8

Для решения той же задачи с помощью энергетического критерия в форме Брайана, нужно отказаться от условия нерастяжимости оси стержня, определить начальное осевое внутреннее усилие в стержне и подсчитать изменение полной потенциальной энергии по зависимости типа (2.45):

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v_1}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^l N_0 \epsilon''_x dx, \quad (2.64)$$

где $N_0 = -P$; $\epsilon'' = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_1}{dx} \right)^2$.

Вид изогнутого стержня, соответствующий записи энергетического критерия в форме Брайана, показан на рис. 2.8, а.

Энергетический метод определения критических нагрузок стержней подробнее рассмотрен в следующей главе. Здесь отметим, что взяв для шарнирно-опертого стержня функцию прогиба

$v_1 = \sin \frac{\pi x}{l}$, из критериев Брайана и С. П. Тимошенко получим точное значение критической силы $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Вторым доводом в пользу изложенной выше механической трактовки энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко служит то обстоятельство, что перемещения u_2 , v_2 , ω_2 могут быть использованы для приближенного описания закритического поведения упругих систем.

§ 11. Метод Рэлея—Ритца в задачах устойчивости

Метод Рэлея—Ритца * является универсальным методом приближенного решения основной задачи вариационного исчисления — задачи определения экстремумов или стационарных значений функционалов. Сущность этого метода состоит в замене задачи поиска стационарных значений функционалов принципиально более простой задачей поиска стационарных значений функций нескольких переменных.

* Впервые метод был применен Рэлеем при решении задач колебаний упругих систем. Метод детально разработан Ритцем на примерах решения нескольких конкретных задач (без должных ссылок на работы Рэлея). С большим успехом метод был использован С. П. Тимошенко (независимо от Ритца и практически одновременно с ним) для решения задач устойчивости [38].

Определение точек бифуркации и критических нагрузок энергетическим методом сводится к определению стационарных значений некоторых функционалов. Для решения последней задачи может быть применен метод Рэлея—Ритца. Схему использования метода Рэлея—Ритца в задачах устойчивости упругих систем рассмотрим на примере определения критической силы для сжатого прямого стержня. При этом следует иметь в виду, что задача устойчивости стержня выбрана только для наглядности изложения и все этапы ее решения, рассуждения и выводы носят общий характер.

Энергетический критерий устойчивости в форме Брайана для прямого стержня, сжатого продольной силой, имеет вид

$$\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0, \quad (2.65)$$

где при $N_0 = -P$ согласно зависимости (2.64)

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l [EJ(v'')^2 - P(v')^2] dx. \quad (2.66)$$

Штрихом здесь и далее обозначено дифференцирование по x .

Граничные условия для функции поперечного прогиба $v = v(x)$ считаем заданными. Например, в случае шарнирно-опертого стержня примем следующие граничные условия:

$$1) v(0) = 0; 2) v(l) = 0; 3) v''(0) = 0; 4) v''(l) = 0. \quad (2.67)$$

При решении задачи методом Рэлея—Ритца функцию поперечного прогиба $v = v(x)$ можно задать в виде ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x), \quad (2.68)$$

где c_i — свободные независимые параметры, базисные функции $f_i(x)$ — допустимые функции задачи, т. е. в этом случае дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие (каждая в отдельности) геометрическим граничным условиям. Для шарнирно-опертого стержня эти функции должны быть подчинены условиям $f_i(0) = 0$ и $f_i(l) = 0$.

Подставив ряд (2.68) в выражение (2.66) и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, преобразуем функционал изменения полной потенциальной энергии стержня в функцию N независимых переменных c_i и параметра нагрузки P :

$$\Delta\mathcal{E} = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_N, P). \quad (2.69)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Phi(c_1, c_2, \dots, c_N, P) = \\ = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EJ \left(\sum_{i=1}^N c_i f_i'' \right)^2 - P \left(\sum_{i=1}^N c_i f_i' \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Необходимое условие стационарности функции $\Phi = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_N, P)$, которой заменен исходный функционал, сводится к системе N уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.70)$$

Полученная система уравнений будет линейной однородной системой N алгебраических уравнений относительно независимых параметров c_i . В матричной записи эта система уравнений имеет вид

$$Ay - PBy = 0, \quad (2.71)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix},$$

причем $a_{ij} = \int_0^l EJ f_i'' f_j'' dx$; $b_{ij} = \int_0^l f_i f_j' dx$.

Итак, с помощью метода Рэлея—Ритца задача определения точек бифуркации прямолинейной формы равновесия стержня сведена к задаче на собственные значения для матриц (см. приложение I). Условие существования отличных от тождественного нуля решений системы (2.71) приводит к уравнению, из которого могут быть найдены собственные значения P_n :

$$\det(A - PB) = \det[a_{ij} - Pb_{ij}] = 0. \quad (2.72)$$

Это уравнение степени N дает N собственных значений P_n , которые приближенно соответствуют N первым точкам бифуркации исходной задачи устойчивости стержня. Наименьшее из найденных собственных значений приближенно равно критической нагрузке, т. е. $P_{кр} \approx (P_n)_{\min}$.

Для каждого собственного значения P_n решения уравнения (2.71) дают возможность с точностью до масштаба приближенно найти форму изогнутой оси стержня в окрестности n -й точки бифуркации. В частности, решение при $(P_n)_{\min}$ приближенно описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости:

$$v_{кр}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{c}_i f_i(x),$$

где $\bar{c}_i = \frac{c_i}{c_1}$.

Если система базисных функций $f_i(x)$ полная, то при $N \rightarrow \infty$ решение задачи методом Рэлея—Ритца сходится к точному решению. Но при практическом использовании метода, когда число членов ряда (2.68) невелико, сходимость к точному решению имеет только теоретическое значение. Значительно важнее удачно выбрать вид первых членов этого ряда.

В случае применения метода Рэлея—Ритца базисные функции $f_i(x)$ должны удовлетворять только геометрическим граничным условиям. Если система базисных функций полная, то при $N \rightarrow \infty$ силовые граничные условия удовлетворяются автоматически. Однако выбирая базисные функции при небольшом числе членов ряда (2.68), удерживаемых в решении, желательно удовлетворять не только геометрическим, но и силовым граничным условиям (особенно для первого члена ряда).

Представление искомой функции в виде ряда далеко не единственный способ перехода от задачи определения стационарных значений функционала к задаче определения стационарных значений функции нескольких переменных. Для этой цели функцию $v(x)$ можно искать среди семейства функций, удовлетворяющих заданным геометрическим условиям задачи и зависящим от N свободных параметров:

$$v(x) = F(x, c_1, c_2, \dots, c_N), \quad (2.73)$$

где c_i — независимые параметры, причем геометрические граничные условия выполняются при любых значениях c_i [ряд (2.68) — частный случай такого семейства функций]. Подставив (2.73) в выражение (2.66), снова получим зависимости типа (2.69), но структура функции $\Phi = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_N, P)$ будет иная.

Переход от задачи определения стационарных значений функционала к задаче определения стационарных значений функции нескольких переменных можно выполнить, минуя аналитическое представление искомой функции $v(x)$.

В исследуемом функционале все производные можно выразить через конечные разности. Если стержень разбить на $N + 1$ равных участков и операцию интегрирования в выражении (2.66) заменить суммированием, то получим

$$\Delta \mathcal{E} = \Phi = \frac{h}{2} \left[\sum_{i=1}^N EJ_i \left(\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} \right)^2 - P \sum_{i=1}^N \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^2 \right],$$

где $h = l/(N + 1)$, а EJ_i и v_i — значения изгибной жесткости и искомой функции в узловых точках, причем в силу геометрических граничных условий шарнирного опирания $v_0 = 0$ и $v_{N+1} = 0$. Рассматривая оставшиеся значения v_i в качестве незави-

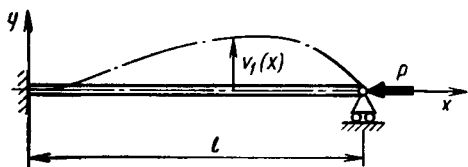


Рис. 2.9

симых переменных, запишем условие стационарности Φ в виде системы уравнений *

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.74)$$

Условие существования отличных от нуля решений снова приводит к уравнению типа (2.72), наименьший корень которого дает приближенное значение $P_{кр}$. Соответствующее этому корню решение системы уравнений (2.74) приближенно описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости.

Уравнения (2.74) являются уравнением Эйлера для функционала (2.66), записанным через конечные разности. Поэтому намеченный путь решения вариационной задачи с помощью конечных разностей фактически сводится к решению дифференциального уравнения Эйлера методом конечных разностей.

В настоящее время имеется ряд модификаций метода Рэлея—Ритца, специально приспособленных для численного счета на ЭЦВМ. Среди них особо следует отметить метод конечных элементов [34].

Использование метода Рэлея—Ритца в сочетании с методом множителей Лагранжа. В описанной выше схеме метода Рэлея—Ритца геометрическим граничным условиям задачи удовлетворяла каждая координатная функция $f_i(x)$. Но при выборе аппроксимирующих функций можно потребовать, чтобы часть граничных условий была удовлетворена не каждой функцией ряда (2.68), а их суммой. В некоторых случаях такой путь решения удобнее.

В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости стержня, один конец которого зашечлен, а другой свободно оперт (рис. 2.9). Граничные условия задачи 1) $v(0) = 0$; 2) $v'(0) = 0$; 3) $v(l) = 0$; 4) $v''(l) = 0$.

Первые три граничных условия являются геометрическими и должны обязательно удовлетворяться при построении приближенного решения задачи методом Рэлея—Ритца.

Функцию прогиба зададим в виде тригонометрического ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l}. \quad (2.75)$$

Каждый из членов этого ряда удовлетворяет двум геометрическим граничным условиям: $v'(0) = 0$ и $v(l) = 0$, но не удо-

* Представление искомой функции через конечные разности при исследовании условий стационарности определенных интегралов использовал Эйлер (1744 г.).

влетворяет третьему условию $v(0) = 0$. Для удовлетворения этому условию параметры c_i необходимо связать дополнительным соотношением

$$\sum_{i=1}^N c_i = 0. \quad (2.76)$$

При этом, очевидно, будет выполняться условие $v(0) = 0$. Подставляя ряд (2.75) в выражение (2.66) и дифференцируя, подсчитываем изменение полной потенциальной энергии стержня

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = \Phi = & \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[\sum_{i=1}^N c_i \left(\frac{2i-1}{2l} \right)^2 \pi^2 \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \right]^2 dx - \\ & - \frac{1}{2} P \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N c_i \left(\frac{2i-1}{2l} \right) \pi \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Для дальнейшего решения целесообразно воспользоваться методом множителей Лагранжа (см. приложение II). Тогда при любом числе членов ряда N получается единообразная схема счета. Введем вспомогательный функционал

$$\Phi^* = \Phi + \lambda \sum_{i=1}^N c_i,$$

где λ — множитель Лагранжа.

Условие стационарности Φ^* и соотношение (2.76) образуют систему $(N+1)$ однородных линейных алгебраических уравнений с $(N+1)$ неизвестными c_i и λ :

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N c_i = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы уравнений, получаем уравнение степени $(N-1)$ относительно P :

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - Pb_{11}) & a_{12} & \dots & a_{1N} & 1 \\ a_{21} & (a_{22} - Pb_{22}) & \dots & a_{2N} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & (a_{NN} - Pb_{NN}) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.77)$$

где

$$a_{ij} = \pi^4 \left(\frac{2i-1}{2l} \right)^2 \left(\frac{2j-1}{2l} \right)^2 \int_0^l EJ \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2j-1)\pi x}{2l} dx; \quad (2.78)$$

$$b_{ii} = \left(\frac{2i-1}{2l} \right)^2 \pi^2 \frac{l}{2},$$

в частности, при $EJ = \text{const}$

$$a_{ii} = \left(\frac{2i-1}{2l} \right)^4 \pi^4 \frac{l}{2} EJ;$$

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Наименьший корень уравнения (2.77) приближенно равен $P_{\text{кр}}$. Например, при $EJ = \text{const}$ получим

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - b_{11}P) & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & (a_{22} - b_{11}P) & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (a_{NN} - b_{NN}P) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

где a_{ii} и b_{ii} определяются по формулам (2.78).

В первом приближении при $N = 2$ приходим к уравнению (при $N = 1$ не может быть удовлетворено условие $v_A(0) = 0$)

$$-(a_{11} - Pb_{11}) - (a_{22} - Pb_{22}) = 0.$$

Откуда

$$P_{\text{кр}} = \frac{a_{11} + a_{22}}{b_{11} + b_{22}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \frac{(1 + 3^4)}{(1 + 3^2)} = \frac{2,05\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Точное значение $P_{\text{кр}} = \frac{20,19 EJ}{l^2}$. Таким образом, погрешность полученного приближенного решения $+0,2\%$. Такая высокая точность объясняется тем, что использованные в решениях функции удовлетворяют не только геометрическим, но и силовым граничным условиям.

При аналитическом представлении искомой функции в виде ряда (2.68) или выражения (2.73) метод Рэлея — Ритца всегда приводит к завышенному значению критической нагрузки. Это происходит вследствие того, что ограничивая выражением (2.73) или рядом (2.68) класс функций, среди которых ищем решение задачи, как бы накладываем на исследуемую систему дополнительные связи. В результате таких дополнительных связей жесткость системы может возрасти, что и приведет к завышенному значению критической нагрузки. Значение критической нагрузки, получен-

ное методом Рэлея—Ритца, равно точному только в том случае, когда взята точная функция прогиба. Но при численном представлении искомой функции приведенная выше оценка теряет силу. Например, в случае представления Δz через конечные разности значение критической нагрузки может оказаться заниженным по сравнению с точным.

§ 12. Связь метода Рэлея — Ритца с методом Галеркина

Одним из наиболее универсальных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Галеркина (или Бубнова—Галеркина *). Рассмотрим схему решения этим методом задач устойчивости, сводящихся к линейным задачам на собственные значения (см. приложение I).

Приближенное решение задачи на собственные значения

$$M[y] - PL[y] = 0, \quad (2.79)$$

где $M[y]$ и $L[y]$ — однородные линейные дифференциальные выражения, конструируют в виде ряда

$$y = \sum_{i=1}^N c_i g_i(x), \quad (2.80)$$

где c_i — произвольные постоянные; $g_i(x)$ — координатные функции, являющиеся функциями сравнения, т. е. удовлетворяющие (каждая в отдельности) всем заданным при $x = a$ и $x = b$ однородным граничным условиям задачи. Ряд (2.80) подставляют в исходное уравнение (2.79) и получают некоторую функцию-ошибку $L = L(x, P, c_1, c_2, \dots, c_N)$, вообще говоря, не равную тождественно нулю. Основная операция метода Галеркина состоит в том, что функцию-ошибку $L(x, P, c_1, c_2, \dots, c_N)$ ортогонализируют ко всем координатным функциям. Для этого ее поочередно умножают на все функции $g_i(x)$ и интегралы от произведений приравнивают нулю. Таким образом, для N неизвестных c_i получают систему N линейных алгебраических уравнений

[illegible]

* Впервые метод предложен в 1913 г. И. Г. Бубновым (для решения задач устойчивости); несколько позже метод был применен Б. Г. Галеркиным для решения задач теории упругости.

В силу однородности исходного уравнения (2.79) функция-ошибка $L(x, P, c_1, c_2, \dots, c_N)$ является однородной относительно произвольных постоянных c_i . Следовательно, система уравнений (2.81) тоже однородная, и для существования отличных от нуля решения полученной системы уравнений ее определитель должен быть равен нулю. Последнее условие приводит к алгебраическому уравнению степени N относительно параметра P . Корни этого уравнения дадут приближенно N первых собственных значений P_n . Для каждого из найденных собственных значений P_n можно выразить все произвольные постоянные через одну произвольную постоянную (например, через c_1) и найти приближенно N первых собственных функций с помощью ряда (2.80).

В задачах на собственные значения метод Галеркина тесно связан с минимальным принципом Рэлея (см. приложение I). В силу линейности исходного уравнения (2.79) подстановка в него ряда (2.80) дает функцию-ошибку

$$L(x, P, c_1, c_2, \dots, c_N) = \sum_{i=1}^N c_i M[g_i(x)] - P \sum_{i=1}^N c_i L[g_i(x)].$$

Система алгебраических уравнений (2.81) метода Галеркина имеет такую структуру:

$$\sum_{i=1}^N c_i \int_a^b g_1(x) M[g_i(x)] dx - P \sum_{i=1}^N c_i \int_a^b g_1(x) L[g_i(x)] dx = 0;$$

$$\dots \dots \dots (2.82)$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \int_a^b g_N(x) M[g_i(x)] dx - P \sum_{i=1}^N c_i \int_a^b g_N(x) L[g_i(x)] dx = 0.$$

Отношение Рэлея после подстановки в него ряда (2.80) будет функцией варьируемых параметров c_i :

$$R = R(c_1, c_2, \dots, c_N) = \frac{M(c_1, c_2, \dots, c_N)}{L(c_1, c_2, \dots, c_N)}, \quad (2.83)$$

где

$$M = M(c_1, c_2, \dots, c_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_i c_k \int_a^b g_i(x) M[g_k(x)] dx;$$

$$L = L(c_1, c_2, \dots, c_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_i c_k \int_a^b g_i(x) L[g_k(x)] dx.$$

Запишем необходимые условия минимума отношения Рэлея

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

или учитывая зависимость (2.83)

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \frac{\frac{\partial M}{\partial c_i} L - \frac{\partial L}{\partial c_i} M}{L^2} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.84)$$

Если исходную задачу на собственные значения считать полностью определенной, то $L^2 > 0$ и из (2.84) следует, что

$$\frac{\partial M}{\partial c_i} - R \frac{\partial L}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Эта система уравнений повторяет систему уравнений метода Галеркина (2.82), причем $R_{\min} = P_1$.

Если в качестве координатных функций $g_i(x)$ взята полная система функций, то увеличивая число членов ряда (2.80), можно теоретически с любой степенью точности определить требуемое количество собственных значений P_n и построить соответствующие им собственные функции задачи. Но при практическом использовании метода Галеркина, как и метода Рэлея—Ритца, приходится ограничиваться сравнительно небольшим числом членов ряда (2.80). Точность и трудоемкость решения определяются не полнотой системы координатных функций, а тем, насколько удачно выбраны первые функции этого ряда.

В задачах устойчивости обычно требуется найти первое собственное значение, дающее критическую нагрузку. Поэтому при выборе координатных функций следует стремиться к тому, чтобы первый член ряда точнее отражал характер первой собственной функции решаемой задачи, а все последующие члены ряда играли бы роль уточняющих поправок. Один из наиболее естественных и надежных путей выбора координатных функций состоит в использовании собственных функций родственной самосопряженной и полностью определенной задачи, допускающей точное аналитическое решение. Например, если задача устойчивости сводится к решению уравнения с переменными коэффициентами, то, осреднив значения коэффициентов, можно перейти к вспомогательной задаче с теми же граничными условиями, но с постоянными коэффициентами. Определив систему собственных функций для этой вспомогательной задачи, затем можно их использовать для построения приближенного решения уравнения с переменными коэффициентами. Такой путь решения обычно дает возможность с высокой точностью определять критические нагрузки даже при сравнительно небольшом числе членов ряда (два-три); при этом гарантируется полнота системы координатных функций.

Метод Галеркина может быть использован для решения не только обыкновенных дифференциальных уравнений, но и уравнений в частных производных.

Метод Галеркина можно трактовать как способ приближенной замены задачи на собственные значения для дифференциальных

уравнений задач на собственные значения для матриц. Обозначив варьируемые коэффициенты ряда (2.80)

$$y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix},$$

систему (2.82) можно записать в матричном виде

$$Ay - PBy = 0,$$

где A и B — квадратные матрицы, причем их элементы равны

$$a_{ik} = \int_a^b g_i(x) M[g_k(x)] dx; \quad b_{ik} = \int_a^b g_i(x) L[g_k(x)] dx.$$

Приближенные собственные значения исходной задачи определяются из решения уравнения $\det(A - PB) = \det[a_{ik} - Pb_{ik}] = 0$. Такая матричная форма записи может быть удобной при численной реализации метода Галеркина с использованием ЭЦВМ.

Примеры использования метода Галеркина приведены в гл. 3 и 4, где отмечены некоторые недостатки этого метода.

Используя энергетический критерий устойчивости (2.65), запишем уравнение Эйлера функционала (2.66):

$$-\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{2}(EJv''^2 - Pv'^2).$$

Продифференцировав, получим

$$(EJv'')'' + Pv'' = 0. \quad (2.85)$$

Это линейное однородное уравнение вместе с однородными граничными условиями описывает изгибную форму равновесия стержня, смежную с исходной.

Построим приближенное решение уравнения (2.85), взяв искомую функцию в виде ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(x), \quad (2.86)$$

где c_i — независимые параметры; $\psi_i(x)$ — функции сравнения рассматриваемой задачи на собственные значения. В данном случае это четырежды дифференцируемые функции, удовлетворяющие всем заданным граничным условиям задачи, например условиям шарнирного опирания (2.67).

Согласно методу Галеркина подставляем ряд (2.86) в решаемое уравнение и находим функцию-ошибку

$$L(x) = \left[EJ \sum_{i=1}^N c_i \psi_i''(x) \right]^* + P \sum_{i=1}^N c_i \psi_i''(x).$$

Ортогонализируя функцию-ошибку ко всем функциям $\psi_i(x)$, приходим к матричному уравнению

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y} - P\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y} = 0, \quad (2.87)$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1N} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{N1} & \tilde{a}_{N2} & \dots & \tilde{a}_{NN} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1N} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{N1} & \tilde{b}_{N2} & \dots & \tilde{b}_{NN} \end{pmatrix};$$

здесь

$$\tilde{a}_{ij} = \int_0^l (EJ \psi_i'')^* \psi_j dx; \quad \tilde{b}_{ij} = - \int_0^l \psi_i'' \psi_j dx.$$

Условие существования отличных от нуля решений полученного уравнения приводит к уравнению

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - P\tilde{\mathbf{B}}) = \det[\tilde{a}_{ij} - P\tilde{b}_{ij}] = 0,$$

из которого можно приближенно найти N первых собственных значений задачи P_n . Наименьшее из этих собственных значений дает приближенное значение критической силы $P_{кр}$.

Рассмотрим решение задачи методом Рэлея—Ритца, но вместо ряда (2.68), в котором каждая функция была допустимой функцией задачи на собственные значения, воспользуемся рядом (2.86), построенным из функций сравнения. Подставив этот ряд в выражение (2.66) и выполнив все необходимые операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$\Delta \mathcal{E} = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_N, P) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\sum_{i=1}^N c_i \psi_i'' \right)^2 dx - \\ - \frac{P}{2} \int_0^l \left(\sum_{i=1}^N c_i \psi_i' \right)^2 dx.$$

Необходимое условие стационарности Φ приводит к матричному уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{y} - P\mathbf{B}\mathbf{y} = 0, \quad (2.88)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix};$$

$$\text{здесь } a_{ij} = \int_0^l EJ \psi_i'' \psi_j'' dx; \quad b_{ij} = \int_0^l \psi_i' \psi_j' dx.$$

Покажем, что уравнение (2.88) тождественно уравнению (2.87), полученному по методу Галеркина. Действительно, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^l EJ \psi_i'' \psi_j'' dx &= EJ \psi_i' \psi_j' \Big|_0^l - \int_0^l (EJ \psi_i'')' \psi_j' dx = \\ &= -(EJ \psi_i'')' \psi_j \Big|_0^l + \int_0^l (EJ \psi_i'')'' \psi_j dx = \int_0^l (EJ \psi_i'')'' \psi_j dx; \\ \int_0^l \psi_i' \psi_j' dx &= \psi_i' \psi_j \Big|_0^l - \int_0^l \psi_i'' \psi_j dx = - \int_0^l \psi_i'' \psi_j dx, \end{aligned}$$

поскольку функции сравнения ψ_i и ψ_j удовлетворяют граничным условиям (2.67), т. е. $\psi(0) = 0$; $\psi(l) = 0$; $\psi''(0) = 0$; $\psi''(l) = 0$.

Следовательно, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$; $b_{ij} = \tilde{b}_{ij}$ и результат приближенного решения задачи методом Рэлея—Ритца полностью совпадает с результатом решения методом Галеркина, если в обоих случаях используется один и тот же ряд (2.86), построенный из функций сравнения. Но из сказанного не следует, что эти два приближенных метода полностью идентичны. При решении задачи методом Рэлея—Ритца можно использовать значительно более широкий класс аппроксимирующих функций, чем при решении задачи методом Галеркина: в методе Рэлея—Ритца это допустимые функции, а в методе Галеркина — функции сравнения.

Для иллюстрации различия между этими методами рассмотрим следующий пример приближенного решения. Определяя критическую силу шарнирно-опертого стержня по методу Рэлея—Ритца, в первом приближении можно взять аппроксимирующую функцию в виде квадратичной параболы, удовлетворяющей геометрическим граничным условиям задачи

$$v(x) = c_1 f_1 = c_1 x(x-l). \quad (2.89)$$

Тогда вместо системы уравнений получим одно уравнение

$$c_1 \int_0^l EJ (2)^2 dx - c_1 P \int_0^l (2x-l)^2 dz = 0.$$

Откуда при $EJ = \text{const}$ найдем приближенное значение критической силы $P_{\text{кр}} = \frac{12EJ}{l^2}$. Точное значение $P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Но все же приближенное решение дает верное представление о порядке значений критической силы. Если попытаемся использовать функцию (2.89) для приближенного решения уравнения (2.85) по методу Галеркина, то придем к абсурдному результату, так как в данном случае $f_1^{\text{IV}}(x) = 0$.

Но если вместо квадратичной параболы, не являющейся функцией сравнения, возьмем четырежды дифференцируемую функцию, удовлетворяющую всем граничным условиям задачи, то результаты приближенных решений метода Рэлея—Ритца и метода Галеркина совпадут. Примем, например,

$$v(x) = c_1 \psi_1(x) = c_1 \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

Тогда методом Рэлея—Ритца и методом Галеркина получим $P_{\text{кр}} = \frac{168}{17} \frac{EJ}{l^2}$. Причем в данном случае даже первое приближение приводит к значению критической силы с погрешностью всего $+0,13\%$.

Задача устойчивости стержня использована в этом параграфе только для наглядности изложения, и все замечания и выводы носят общий характер.

Устойчивость прямых стержней при продольном сжатии

Задачи устойчивости упругих стержней хорошо изучены и достаточно широко известны.

Цель этой главы показать не специфику задач устойчивости стержней, а то общее, что присуще всем задачам устойчивости тонкостенных упругих систем. Именно с этих позиций следует рассматривать подробный вывод основного линеаризованного уравнения четвертого порядка, детальное описание смены форм потери устойчивости стержня на упругом основании и на упругих опорах, анализ влияния сдвиговых деформаций на критическую нагрузку и приближенное исследование закритического поведения стержней.

§ 13. Основное линеаризованное уравнение и его решение

В предыдущих главах решено несколько частных задач устойчивости прямых стержней. В этом параграфе дан вывод общего линеаризованного уравнения для произвольно нагруженного упругого прямого стержня переменного поперечного сечения, сформулированы граничные условия и приведены примеры точного и приближенного решения этого уравнения.

Представим стержень в системе прямоугольных координат, как показано на рис. 3.1, а, причем примем, что одна из главных центральных осей поперечного сечения стержня лежит в плоскости xu .

Линеаризованное уравнение изгиба стержня в плоскости xu получим при следующих допущениях.

1. Ось ненагруженного стержня идеально прямая и все внешние нагрузки и реакции опор до потери устойчивости действуют строго вдоль этой оси.

2. Внешние нагрузки «мертвые», т. е. при деформациях стержня они не изменяются ни по величине, ни по направлению.

3. Изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях считается пренебрежимо малым; в частности, в процессе нагружения длина стержня, площадь и момент инерции его поперечного сечения считаются неизменными.

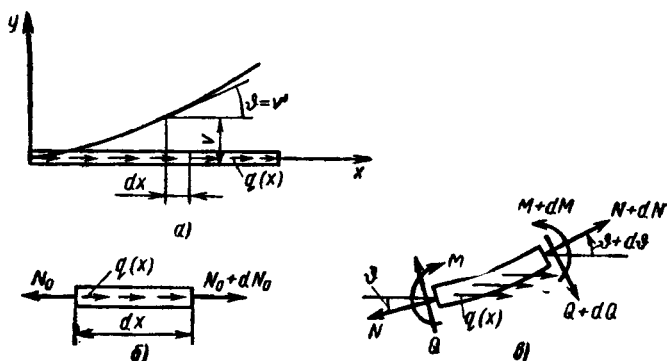


Рис. 3.1

4. Связь между внутренним изгибающим моментом и поперечным изгибом стержня при потере устойчивости описывается обычной зависимостью линейной теории изгиба балок, основанной на гипотезе плоских сечений.

В силу первого допущения возможна прямолинейная исходная форма равновесия нагруженного стержня. При достаточно малых нагрузках прямолинейная форма равновесия является единственной и устойчивой. Определим условия, при которых возможны формы равновесия стержня с изогнутой осью, смежные с исходной прямолинейной формой.

Условие равновесия элемента неискривленного стержня (рис. 3.1, б) приводит к уравнению

$$N'_0 + q = 0. \quad (3.1)$$

Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по x .

В дальнейшем задачу определения начальных осевых усилий $N_0 = N_0(x)$ будем считать решенной и закон изменения их по длине стержня известным.

Рассмотрим равновесие элемента стержня в искривленном, отклоненном от исходного состоянии (рис. 3.1, в), причем поперечные прогибы $v = v(x)$ будем считать бесконечно малыми. Порядок малости достаточно гладкой функции $v(x)$ сохраняется при дифференцировании, поэтому $v'(x)$, $v''(x)$, $v'''(x)$ и т. д. можно считать величинами первого порядка малости*. Во всех окончательных зависимостях в соответствии с основной идеей линеаризации (см. § 4) следует удерживать только величины

* Для пояснения этого, например, можно принять $v(x) = \alpha v_1(x)$, где $v_1(x)$ — конечная, достаточное число раз дифференцируемая функция; α — бесконечно малая величина первого порядка малости, не зависящая от координаты. Тогда $v' = \alpha v'_1(x)$, $v'' = \alpha v''_1(x)$, $v''' = \alpha v'''_1(x)$ и т. д. тоже будут величинами первого порядка малости.

первого порядка малости. В частности, при составлении уравнений равновесия искривленного элемента следует положить $v' = \vartheta$; $\sin \vartheta = \vartheta$; $\cos \vartheta = 1$; $\sin (\vartheta + d\vartheta) = \vartheta + d\vartheta$; $\cos (\vartheta + d\vartheta) = 1$.

Тогда, проектируя на ось x все силы, действующие на искривленный элемент, получим

$$-N \cdot 1 - Q\vartheta + q dx + (N + dN) \cdot 1 + (Q + dQ)(\vartheta + d\vartheta) = 0.$$

Произведение $dQ d\vartheta$ как величину высшего порядка малости не учитываем и приходим к уравнению

$$N' + (Q\vartheta)' + q = 0. \quad (3.2)$$

Приравняв нулю сумму проекций всех сил на ось y и сумму всех моментов и исключив величины высших порядков малости, получим еще два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Q' - (N\vartheta)' &= 0; \\ Q &= M'. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

В силу четвертого допущения и последнего уравнения внутренних изгибающих момент M и внутренняя поперечная сила Q связаны с прогибом такими же зависимостями, как и при обычном поперечном изгибе $M = EJ\vartheta'$; $Q = (EJ\vartheta')'$, где $EJ = EJ(x)$ — изгибная жесткость стержня в плоскости xy .

Слагаемое $(Q\vartheta)' = [(EJv'')' v']'$ следует исключить из уравнения (3.2) как содержащее произведение двух величин первого порядка малости. Тогда это уравнение не будет отличаться от уравнения равновесия неискривленного элемента стержня (3.1). Следовательно, при бесконечно малых поперечных прогибах начальное осевое усилие остается неизменным с точностью до величин второго порядка малости.

Учитывая сказанное, в первом уравнении (3.3) можно положить $N(x) = N_0(x)$. Поскольку $\vartheta = v'$ и $Q = (EJv'')'$, окончательно получим

$$(EJv'')'' - (N_0v')' = 0. \quad (3.4)$$

Это линейное однородное уравнение четвертого порядка является основным уравнением теории устойчивости прямых упругих стержней. Оно применимо при любых законах изменения жесткости $EJ(x)$, при любых нагрузках и условиях закрепления, охватываемых сформулированными выше допущениями.

Для однопролетного стержня в соответствии с порядком уравнения (3.4) должны быть сформулированы четыре граничных условия (по два на каждом из торцов). В силу первого допущения эти условия будут однородными. Если все внешние нагрузки считать изменяющимися пропорционально одному параметру P , то уравнение (3.4) можно переписать в таком виде:

$$(EJv'')'' - P(\bar{N}_0v')' = 0; \quad (3.4')$$

где $\bar{N}_0 = \bar{N}_0(x)$ — закон изменения начальных внутренних усилий в неискривленном стержне при $P = 1$. Таким образом, определение условий существования изгибных форм равновесия первоначально прямолинейного стержня свелось к решению задач на собственные значения. Для того чтобы найти условия существования изгибных форм равновесия, смежных с исходной прямолинейной формой, необходимо найти значения параметра нагрузки P_n , при которых однородное уравнение (3.4') при однородных граничных условиях имеет нетривиальные решения (см. приложение I).

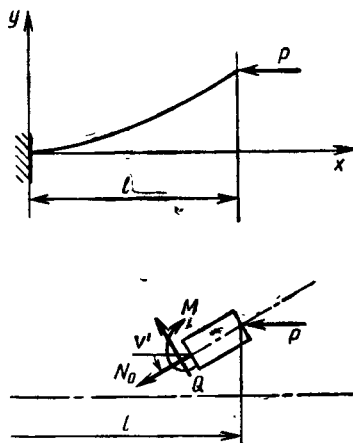


Рис. 3.2

Рассмотрим граничные условия в задачах устойчивости прямых стержней. Геометрические граничные условия в задачах устойчивости формулируются так же, как и в задачах поперечного изгиба балок: на торце стержня могут быть запрещены поперечное перемещение u , поворот касательной v' или и то и другое одновременно.

Силовые граничные условия для ненагруженного торца аналогичны силовым граничным условиям задач поперечного изгиба. Если поперечные перемещения на торце не стеснены, то поперечная сила равна нулю, т. е. $Q = (EJv'')' = 0$. Когда углы поворота не стеснены, изгибающий момент равен нулю, т. е. $M = EJv' = 0$. На свободном торце и поперечная сила, и изгибающий момент обращаются в нуль.

Принципиальное отличие силовых граничных условий задач устойчивости от силовых граничных условий линейных задач поперечного изгиба выявляется тогда, когда на торец стержня передаются сосредоточенные внешние усилия. Оно обусловлено тем, что в задачах устойчивости рассматриваются условия равновесия в отклоненном, искривленном положении системы. Поэтому, если, например, к незакрепленному торцу стержня приложена мертвая осевая сила P , то условие равновесия примыкающего к торцу элемента (рис. 3.2), составленное для его отклоненного положения (в проекции на ось y), приводит к уравнению $Q - N_0 v' = 0$. В данном случае, когда $N_0 = -P$, получим граничное условие $(EJv'')' + Pv' = 0$ при $x = l$.

При формулировке силовых граничных условий особого внимания заслуживают те случаи, когда мертвые внешние нагрузки передаются на стержень с помощью промежуточных деталей, изменяющих при изгибе стержня воспринимаемое им силовое воздействие. Несколько примеров такого нагружения стержней

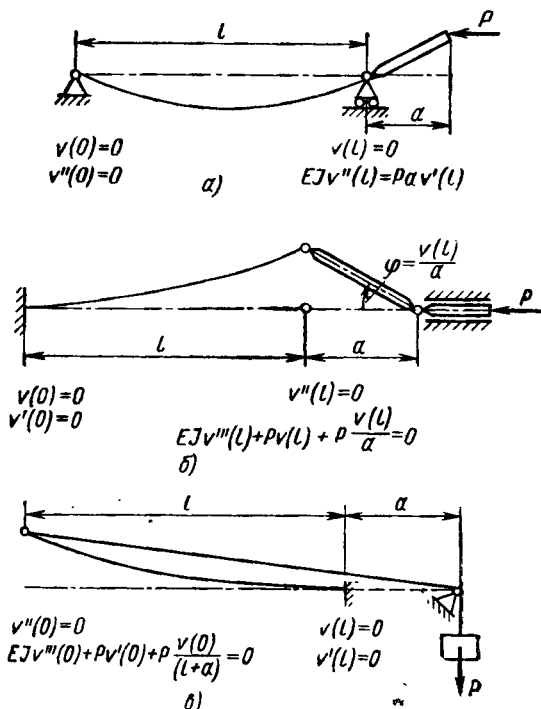


Рис. 3.3

приведены на рис. 3.3, где для каждого случая указаны граничные условия. Так, например, на правый торец стержня изображенного на рис. 3.3, а, передается изгибающий момент, пропорциональный длине жесткого рычага и углу поворота касательной к оси стержня над правой опорой. Отсюда следует граничное условие $M = Pa\vartheta$, т. е. $EJv'' = Pav'$ при $x = l$. При изгибе консольного стержня, нагружаемого через жесткий шатун (рис. 3.3, б), на правый его торец кроме продольной силы P передается поперечная сила, пропорциональная углу наклона жесткого рычага $\varphi = \frac{v(l)}{a}$. Граничное условие $(EJv'')' + Pv' + P\frac{v}{a} = 0$ при $x = l$. Аналогично поперечная сила (противоположного знака) возникает при изгибе показанного на рис. 3.3, в стержня, нагружаемого с помощью гибкой нити.

Уравнение (3.4) удастся точно проинтегрировать только в некоторых случаях. Например, если стержень постоянной жесткости ($EJ = \text{const}$) сжат одной продольной силой P , то $N_0 = -P = \text{const}$ и уравнение (3.4) принимает вид

$$EJv^{IV} + Pv'' = 0. \quad (3.5)$$

Это уравнение с постоянными коэффициентами допускает точное решение при любых граничных условиях. Перепишем уравнение (3.5) в виде

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0; \quad k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (3.6)$$

Решением уравнения (3.6) будет

$$v = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 x + A_4, \quad (3.7)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Как отмечалось, для однопролетного стержня должны быть заданы четыре граничных условия. Подставив в них общее решение (3.7), получим систему четырех однородных линейных уравнений относительно четырех неизвестных A_i . Из условия равенства нулю определителя этой системы можно найти собственные значения задачи P_n и соответствующие им собственные функции. Наименьшее из собственных значений дает критическое значение нагрузки, а соответствующая ему собственная функция описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости.

Изложенную схему решения используем, например, для определения критической силы и формы изогнутой оси при потере устойчивости стержня, изображенного на рис. 3.4.

Выпишем четыре однородных граничных условия задачи 1) $v(0) = 0$; 2) $v''(0) = 0$; 3) $v(l) = 0$; 4) $v'(l) = 0$. Подчиняя решение (3.7) этим граничным условиям, приходим к системе линейных однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_2 \cdot 1 + A_4 &= 0; \\ -A_2 k^2 &= 0; \\ A_1 \sin kl + A_2 \cos kl + A_3 l + A_4 &= 0; \\ A_1 k \cos kl - A_2 k \sin kl + A_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Характеристическое уравнение, дающее собственные значения задачи, можно найти, приравняв нулю определитель полученной системы. При аналитическом решении значительно удобнее не раскрывать определители высокого порядка, а, последовательно исключая неизвестные из исходной системы уравнений, выразить постоянные A_i через какую-нибудь одну из них, заведомо не равную нулю. В рассматриваемом примере согласно первым двум уравнениям системы (3.8) $A_2 = A_4 = 0$. Из третьего уравнения следует, что $A_3 = -A_1 \frac{\sin kl}{l}$. Подставив это значение в последнее уравнение, получим

$$A_1 \left(k \cos kl - \frac{\sin kl}{l} \right) = 0.$$

Необходимое условие существования решения, отличного от триви-

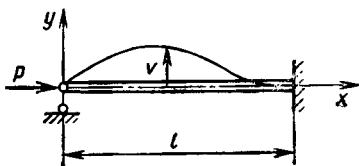


Рис. 3.4

ального (равенство нулю выражения стоящего в скобках), приводит к характеристическому уравнению $\operatorname{tg} kl = kl$. Решив это трансцендентное уравнение, найдем собственные значения задачи $(kl)_1 = 4,49$; $(kl)_2 = 7,73$; $(kl)_3 = 10,9$; ...; $(kl)_n \approx \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$.

Так как в рассматриваемой задаче $A_2 = A_4 = 0$; $A_3 = -A_1 \frac{\sin kl}{l}$, то собственные функции выражаются следующими зависимостями, полученными из общего решения (3.7) при подстановке соответствующих собственных значений $(kl)_n$:

$$v_n(x) = \left[\sin \frac{(kl)_n x}{l} - \frac{x}{l} \sin (kl)_n \right].$$

Наименьшее (первое) собственное значение $(kl)_1 = 4,49$ дает критическое значение сжимающей силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{(4,49)^2 EJ}{l^2} = \frac{20,2 EJ}{l^2}.$$

Собственная функция, соответствующая первому собственному значению, с точностью до масштаба описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости:

$$v_{\text{кр}}(x) = v_1(x) = \left(\sin \frac{4,49x}{l} - \frac{x}{l} \sin 4,49 \right).$$

Для рассматриваемой конкретной задачи, как и вообще для задач устойчивости, непосредственный практический интерес представляет только первое собственное значение, дающее значение критической силы, и первая собственная функция, описывающая форму потери устойчивости. Остальные собственные функции могут быть полезны для построения приближенных решений более сложных задач с теми же граничными условиями.

Аналогично может быть решена и любая другая задача устойчивости равномерно сжатого стержня с постоянной изгибной жесткостью. При этом окончательное выражение критической силы обычно записывается в одном из двух вариантов:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$$

или

$$P_{\text{кр}} = C \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

где μ — коэффициент приведенной длины, показывающий, во сколько раз следует увеличить длину шарнирно-опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной l при рассматриваемых граничных условиях.

Коэффициент C показывает, во сколько раз критическая сила рассматриваемого стержня отличается от критической силы шарнирно-опертого стержня той же длины l . Значения этих коэффициентов приведены на рис. 3.5.

Кроме приведенных простейших примеров имеется большое количество других более сложных задач, допускающих точное аналитическое решение [21]. Однако в общем случае при произвольных законах изменения $EJ(x)$ и $N_0(x)$ уравнение (3.4) не удастся аналитически проинтегрировать. Тогда для определения критических нагрузок и форм изогнутой оси стержня при потере устойчивости прибегают к приближенным методам. Одним из наиболее эффективных машинных методов определения критических нагрузок в задачах устойчивости прямых стержней является метод начальных параметров.

Прежде чем перейти к изложению примеров использования этого метода, необходимо подчеркнуть, что не всегда целесообразно применять полное уравнение четвертого порядка (3.4). В ряде случаев удастся предварительно понизить порядок этого уравнения и существенно упростить решение (и аналитическое и особенно численное). Остановимся сейчас на двух основных случаях понижения порядка уравнения (3.4).

Для шарнирно-опертого стержня (рис. 3.6, а), сжатого осевой силой P , начальное внутреннее усилие $N_0 = -P = \text{const}$. В этом случае, дважды проинтегрировав уравнение (3.4), получим

$$EJ(x)v'' + Pv = A_3x + A_4$$

при граничных условиях:

- 1) $v(0) = 0$; 2) $v''(0) = 0$; 3) $v(l) = 0$; 4) $v''(l) = 0$.

Положив в этом уравнении $x = 0$, с учетом двух первых граничных условий, найдем $A_4 = 0$. При $x = l$ из двух оставшихся граничных условий получим $A_3 = 0$ и придем к уравнению второго порядка

$$EJ(x)v'' + Pv = 0. \quad (3.9)$$

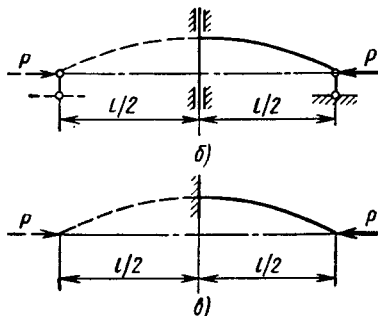
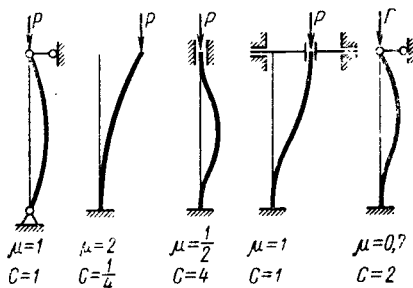
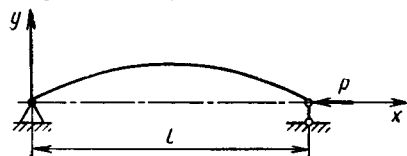


Рис. 3.5

Рис. 3.6

Это уравнение обычно выводится из условия равновесия части стержня в отклоненном положении (см. § 4). Оно приведено в предыдущих главах. Нетрудно убедиться, что уравнение (3.9) справедливо при решении задач устойчивости стержней, изображенных на рис. 3.6, б и в. Они эквивалентны задаче устойчивости шарнирно-опертого стержня с изгибной жесткостью $EJ(x)$, симметрично изменяющейся относительно среднего сечения. Примеры решения задач устойчивости стержней с помощью этого уравнения приведены выше.

Иногда для понижения порядка основного уравнения в качестве искомой неизвестной целесообразно рассматривать не поперечный прогиб, а угол поворота $\vartheta = \vartheta(x)$. Тогда заменив в уравнении (3.4) v' на ϑ и проинтегрировав один раз, получим $(EJ\vartheta')' - N_0\vartheta = A_1$. Если на одном из торцов стержня (например, при $x = 0$) поперечные смещения не стеснены, то одним из граничных условий будет $(EJ\vartheta')' - N_0\vartheta = 0$. Следовательно, в этом случае $A_1 = 0$ и можно записать

$$(EJ\vartheta')' - N_0\vartheta = 0. \quad (3.10)$$

Для некоторых практически важных случаев это уравнение второго порядка допускает точное решение. Так, например, для стержня постоянного поперечного сечения, находящегося под действием собственного веса, учитывая, что в этом случае $EJ = \text{const}$ и $N_0(x) = -qx$ (рис. 3.7) и используя подстановку

$$t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ}} x^3,$$

уравнение (3.10) можно привести к каноническому виду уравнения Бесселя

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\vartheta}{dt} + \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \frac{1}{t^2} \right] \vartheta = 0.$$

Решение этого уравнения хорошо изучено; оно сводится к табулированным функциям Бесселя. В частности, подчиняя решение уравнения Бесселя очевидным граничным условиям $\vartheta' = 0$ при $x = 0$ и $\vartheta = 0$ при $x = l$, можно найти, что

$$(ql)_{\text{кр}} = 7,837 \frac{EJ}{l^2}.$$

Уравнение (3.10) интегрируется и еще для некоторых конкретных законов изменения $EJ(x)$ и $N_0(x)$ [21, 31].

Наметим путь решения уравнения (3.10) методом начальных параметров. Введем двумерный вектор состояния, характеризующий вызванные изгибом перемещения и внутренние усилия в произвольном сечении стержня:

$$y = \begin{pmatrix} \vartheta \\ M \end{pmatrix},$$

где $\vartheta = \vartheta(x)$, $M = M(x)$ — угол поворота и внутренний изгибающий момент в текущем сечении стержня.

Как следует из приведенного выше вывода уравнения (3.4),

$$\vartheta' - \frac{M}{EJ} = 0.$$

Уравнение (3.10) запишем в виде [напомним, что закон изменения внутреннего осевого усилия $N_0 = N_0(x)$ считается известным] $M' - N_0\vartheta = 0$. Два последних уравнения объединим в одно матричное уравнение

$$y' - Ay = 0, \quad (3.11)$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{EJ(x)} \\ N_0(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

При заданных граничных условиях нетрудно найти критическую нагрузку и форму изогнутой оси стержня при любых законах изменения $N_0(x)$ и $EJ(x)$, решив численно уравнение (3.11).

Общую схему решения покажем на примере определения запаса устойчивости вертикально стоящей колонны переменного сечения, находящейся под действием собственного веса и несущей сосредоточенный груз Q . Законы изменения изгибной жесткости колонны $EJ = EJ(x)$ и погонной нагрузки $q = q(x)$ заданы (рис. 3.8).

Сначала найдем распределение внутренних осевых усилий $\bar{N}_0(x)$ по высоте колонны. Рассмотрим равновесие части колонны, находящейся выше сечения x ; тогда получим

$$\bar{N}_0(x) = - \left[Q + \int_0^l q(x) dx - \int_0^x q(x) dx \right].$$

При численно заданных значениях $q(x)$ интегрирование также производится численно. Умножим все действующие на колонну нагрузки на параметр P и рассмотрим внутреннее осевое усилие $N_0(x) = P\bar{N}_0(x)$. Цель дальнейшего расчета — найти $P_{кр}$, ибо значение $P_{кр}$ равно запасу устойчивости колонны.

Прежде чем приступать к численному интегрированию уравнения (3.11), ожидаемый результат можно оценить каким-нибудь приближенным методом. Такая оценка, во-первых, облегчает численный поиск $P_{кр}$, во-вторых, до известной степени предот-

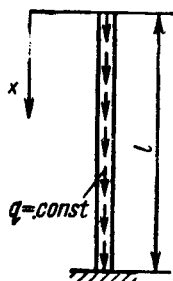


Рис. 3.7

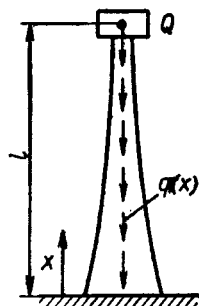


Рис. 3.8

вращает грубую ошибку. Для этой цели воспользуемся методом Галеркина (см. § 12).

Уравнение (3.10) запишем в следующем виде:

$$(EJ\vartheta')' - P\bar{N}_0(x)\vartheta = 0.$$

Граничные условия задачи 1) $\vartheta(0) = 0$; 2) $\vartheta'(l) = 0$. Для оценки $P_{кр}$ в первом приближении, удовлетворив оба граничных условия, возьмем

$$\vartheta = c_1\vartheta_1(x) = c_1\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Согласно методу Галеркина находим

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l (EJ\vartheta_1')' \vartheta_1 dx}{\int_0^l \bar{N}_0(x) \vartheta_1^2 dx}. \quad (3.12)$$

При численно заданных $EJ(x)$ и $\bar{N}_0(x)$ интегрирование здесь тоже производится численно. Стоящий в числителе интеграл следует преобразовать так, чтобы избавиться от необходимости дифференцировать численно заданную функцию $EJ(x)$. Для этого проинтегрируем стоящее в числителе выражение по частям. Учитывая граничные условия, которым подчинена функция $\vartheta_1(x)$, получим

$$\int_0^l (EJ\vartheta_1')' \vartheta dx = EJ\vartheta_1'\vartheta_1\Big|_0^l - \int_0^l EJ\vartheta_1'\vartheta_1' dx = - \int_0^l EJ\vartheta_1'^2 dx.$$

Тогда в первом приближении приходим к выражению

$$P_{кр} = - \frac{\int_0^l EJ\vartheta_1'^2 dx}{\int_0^l \bar{N}_0(x) \vartheta_1^2 dx}. \quad (3.13)$$

Для оценки точности приближенного решения задачи, полученного методом Галеркина, сравним его результаты с известными точными решениями. Так, при $EJ = \text{const}$, $q(x) \equiv 0$ и $\bar{N}_0 = -Q = \text{const}$ точное решение задачи известно: $Q_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} =$

$= 2,47 \frac{EJ}{l^2}$. Для этого частного случая из выражения (3.13) имеем

$$Q_{кр} = \frac{EJ \int_0^l \vartheta_1'^2 dx}{\int_0^l \vartheta_1^2 dx}.$$

Подставим в эту формулу выбранную функцию $\vartheta_1(x)$. Тогда $Q_{кр} = \frac{10}{4} \frac{EJ}{l^2} = 2,5 \frac{EJ}{l^2}$.

Точное решение задачи известно и при $EJ = \text{const}$, $Q = 0$, $q = \text{const}$: $(ql)_{кр} = 7,837 \frac{EJ}{l^2}$. В этом случае $\bar{N}_0(x) = -ql \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ и из выражения (3.13) имеем

$$(ql)_{кр} = \frac{EJ \int_0^l \vartheta_1'^2 dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \vartheta_1^2 dx}.$$

Подставив выбранную функцию $\vartheta_1(x)$ и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, находим $(ql)_{кр} = 8 \frac{EJ}{l^2}$. В рассмотренных частных случаях точность приближенного решения задачи, полученного методом Галеркина, вполне удовлетворительна. Используя для решения выражение (3.12), получим те же результаты.

В качестве примера для численного счета возьмем колонну со следующими параметрами:

$$EJ(x) = EJ_0 \left[1 - \frac{15}{8} \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]; \quad q = q_0 \left(1 - \frac{7}{8} \frac{x}{l} \right);$$

$$Q = 4q_0 l; \quad q_0 = \frac{1}{4} \frac{EJ_0}{l^3}.$$

При этих параметрах приближенное решение методом Галеркина дает $P_{кр} = \frac{808}{525} = 1,54$.

Численное интегрирование уравнения (3.11) приводит к значению $P_{кр} = 1,03$. Причем с учетом $\vartheta(0) = 0$ и того, что решение однородного уравнения (3.11) должно быть получено только с точностью до масштаба, численное интегрирование начинаем со значения $\vartheta(0)$, $M(0) = 1$ и подбором параметра P добиваемся выполнения граничного условия на другом конце колонны $M(l) = 0$.

Одновременно можно получить форму изогнутой оси колонны при потере устойчивости $v = \int_0^x \vartheta dx$.

Для произвольно закрепленного и произвольно нагруженного стержня вектор состояния, характеризующий перемещения и внутренние усилия в произвольном сечении, можно принять в следующем виде:

$$y = \begin{pmatrix} v \\ \vartheta \\ M \\ Q \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные зависимости между компонентами этого четырехмерного вектора следуют из вывода уравнения (3.4):

$$v' = \vartheta; \quad \vartheta' = \frac{M}{EJ}; \quad M' = Q; \quad Q' = -q\vartheta + \frac{N_0}{EJ} M.$$

Приведенные зависимости объединяются в одно матричное уравнение

$$y' - Ay = 0, \quad (3.14)$$

где

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q(x) & \frac{N_0}{EJ} & 0 \end{pmatrix}.$$

Принципиальная схема определения критических нагрузок с помощью метода начальных параметров остается такой же, как и в изложенном выше примере.

Для определения критических нагрузок однопролетного стержня могут быть использованы и другие приближенные методы [19, 31, 36, 37].

§ 14. Решение задач устойчивости стержней энергетическим методом

Задачу устойчивости прямого стержня рассмотрим при допущениях, сформулированных в предыдущем параграфе, но для ее решения используем энергетический подход.

На рис. 3.9 изображен упругий стержень, находящийся под действием распределенной нагрузки $q(x)$ и сосредоточенной силы P , причем правый торец стержня упруго закреплен относительно продольных смещений. Задачу определения начального напряженно-деформированного состояния такого стержня при неискривленном состоянии считаем решенной и начальные осевые усилия $N_0(x) = EFu'_0$ известными [где $EF = EF(x)$ — жесткость стержня на растяжение $u = u_0(x)$ — начальное осевое перемещение].

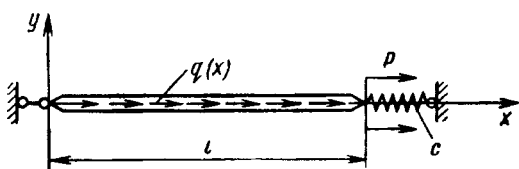


Рис. 3.9

Для того чтобы при искривлении оси стержня выразить изменение полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$ в форме Брайана, сообщим точкам оси стержня поперечные перемещения $v = v_1(x)$ первого порядка малости (рис. 3.10, а). Изменение полной потенциальной энергии стержня $\Delta\mathcal{E}$ при переходе от прямолинейной формы равновесия к новому искривленному состоянию определим с точностью до величин второго порядка малости (см. § 9). Представим $\Delta\mathcal{E}$ в виде суммы двух слагаемых: $\Delta\mathcal{E} = V + U$, где V — потенциальная энергия изгиба стержня; U — изменение потенциальной энергии растяжения стержня, вызванное поперечными перемещениями $v_1(x)$.

Поскольку согласно принятому допущению (см. § 13) изгиб стержня при потере устойчивости описывается обычной теорией изгиба балок, можно записать (см. § 8)

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx, \quad (3.15)$$

где $EJ = EJ(x)$ изгибная жесткость стержня в плоскости xy .

Для подсчета U найдем удлинения оси стержня $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x)$, вызываемые поперечными перемещениями $v_1(x)$. Ограничившись квадратичными членами разложения (поскольку изменение полной

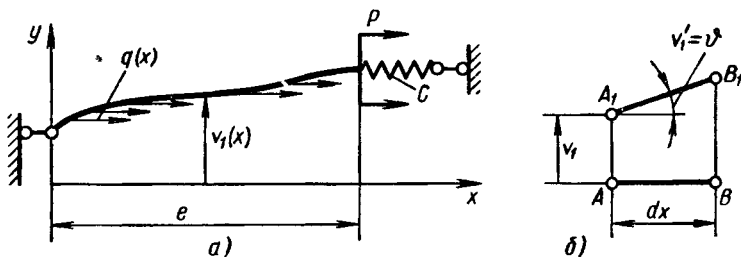


Рис. 3.10

энергии $\Delta\mathcal{E}$ необходимо знать с точностью до величин второго порядка малости), получим (рис. 3.10, б)

$$\varepsilon_2 = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{A_1 B_1}{AB} - 1 = \frac{1}{\cos v'_1} - 1 = \frac{1}{2} v_1'^2.$$

При поперечных перемещениях стержня начальные усилия совершают работу на этих удлинениях, поэтому

$$U = \int_0^l N_0 \varepsilon_2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l N_0 v_1'^2 dx.$$

Таким образом,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ v_1''^2 + N_0 v_1'^2) dx. \quad (3.16)$$

Поскольку при выводе выражения (3.16) точкам оси стержня сообщались только поперечные перемещения $v_1(x)$, мертвые продольные внешние нагрузки, не совершающие работу на поперечных перемещениях, не вошли в это выражение.

Из условия стационарности $\Delta\mathcal{E}$ (или из условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума критической нагрузки) можно найти (точно или приближенно) точки бифуркаций прямолинейной исходной формы равновесия стержня. В частности, из условия стационарности следует основное линейаризованное уравнение (3.4) и возможные для этого уравнения граничные условия. Действительно, приравняв нулю первую вариацию изменения полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, получим (см. приложение II)

$$\delta(\Delta\mathcal{E}) = \int_0^l (EJ v_1'' \delta v_1' + N_0 v_1' \delta v_1) dx = 0.$$

Последовательно проинтегрируем по частям:

$$EJ v_1'' \delta v_1' \Big|_0^l + [N_0 v_1' - (EJ v_1'')] \delta v_1 \Big|_0^l + \int_0^l [(EJ v_1'')' - (N_0 v_1')'] \delta v_1 dx = 0.$$

Откуда следует основное линейаризованное уравнение (3.4) и однородные граничные условия при $x = 0$ и $x = l$:

$$EJ v_1'' = 0 \quad (M = 0) \quad \text{либо} \quad v_1' = 0;$$

$$(EJ v_1'')' - N_0 v_1' = 0 \quad (Q - N_0 v_1' = 0) \quad \text{либо} \quad v_1 = 0.$$

Энергетический критерий в форме Брайана (и вытекающее из него основное линейаризованное уравнение) справедлив при любых условиях закрепления стержня в осевом направлении. Эти условия закрепления должны учитываться при определении начальных осевых усилий $N_0 = N_0(x)$.

В приведенном выше выводе выражения (3.16) фигурировали только перемещения первого порядка малости $v_1 = v_1(x)$, переводившие стержень из начальной прямолинейной формы равновесия в смежную форму равновесия с изогнутой осью. При этом дополнительные осевые перемещения считали тождественно равными нулю. Нетрудно показать, что окончательное выражение (3.16) не изменится, если кроме поперечных перемещений $v_1(x)$ учесть дополнительные осевые перемещения второго порядка малости $u_2(x)$ (см. § 10).

Это обстоятельство позволяет перейти от энергетического критерия устойчивости в форме Брайана к энергетическому критерию в форме С. П. Тимошенко. Для изображенного на рис. 3.9 прямого стержня вместо общего выражения (2.63) получим

$$\Delta \mathcal{E} = V - \int_0^l q(x) u_2(x) dx - P u_2(l), \quad (3.17)$$

где V — потенциальная энергия изгиба стержня, подсчитываемая по формуле (3.15).

Вместо системы уравнений (2.60) получим одно уравнение

$$N'_2 = 0, \quad (3.18)$$

где N_2 — дополнительное осевое усилие.

При не равных нулю дополнительных осевых перемещениях удлинение $\varepsilon_2 = u'_2 + \frac{1}{2}(v'_1)^2$.

Учитывая, что $N_2 = EF \varepsilon_2$, из (3.18) приходим к дифференциальному уравнению, позволяющему выразить дополнительные перемещения второго порядка малости u_2 через поперечные перемещения v_1 первого порядка малости:

$$\left[EF \left(u'_2 + \frac{1}{2} v_1'^2 \right) \right]' = 0. \quad (3.19)$$

В рассматриваемом случае граничными условиями, очевидно, будут 1) $u_2(0) = 0$; 2) $EF u_2'(l) + c u_2(l) = 0$. Дважды интегрируя (3.19) и учитывая первое из этих граничных условий, находим

$$u_2(x) = A \int_0^x \frac{dx}{EF(x)} - \frac{1}{2} \int_0^x v_1'^2 dx. \quad (3.20)$$

Постоянная A определяется из второго граничного условия. В частности, при $c = 0$ получаем $A = 0$ и

$$u_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x v_1'^2 dx. \quad (3.21)$$

В этом случае $\varepsilon_2 = u'_2 + \frac{1}{2} v_1'^2 \equiv 0$ и $N_2(x) \equiv 0$, т. е. переход от прямолинейного состояния равновесия к искривленному проис-

ходит без дополнительного растяжения оси стержня. Тогда изменение полной потенциальной энергии стержня

$$\Delta \mathcal{E} = V + \frac{1}{2} \int_0^l q(x) \int_0^x v_1'^2 dx dx + \frac{P}{2} \int_0^l v_1'^2 dx. \quad (3.22)$$

При $c \rightarrow \infty$, когда $u_2(l) = 0$, из выражения (3.20) получаем

$$u_2(x) = \frac{1}{2A} \left(\int_0^l v_1'^2 dx \right) \left[\frac{\int_0^x \frac{dx}{EF(x)}}{\int_0^l \frac{dx}{EF(x)}} - \frac{\int_0^x v_1'^2 dx}{\int_0^l v_1'^2 dx} \right]; \quad (3.23)$$

$$\Delta \mathcal{E} = V - \int_0^l q(x) u_2(x) dx. \quad (3.24)$$

Причем дополнительные осевые удлинение ε_2 и усилие N_2 не равны нулю, а определяются выражениями

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{EF(x)} \frac{\frac{1}{2} \int_0^l v_1'^2 dx}{\int_0^l \frac{dx}{EF(x)}};$$

$$N_2 = \varepsilon_2 EF(x) = \frac{1}{2} \frac{\int_0^l v_1'^2 dx}{\int_0^l \frac{dx}{EF(x)}} = \text{const.}$$

Когда изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ подсчитывается в форме С. П. Тимошенко, $\Delta \mathcal{E}$ выражается непосредственно через внешние нагрузки, а начальные осевые усилия $N_0(x)$ в выражении (3.17) не входят.

Дальнейшее решение можно вести (точно или приближенно) из условия $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ либо $\Delta \mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума нагрузки. Выражение изменения полной потенциальной энергии в форме С. П. Тимошенко удобно для приближенной оценки критических нагрузок в тех случаях, когда потеря устойчивости стержня может происходить без растяжения его оси, т. е. когда справедлива зависимость (3.22). В частности из этой зависимости можно получить хорошо известную из курса сопро-

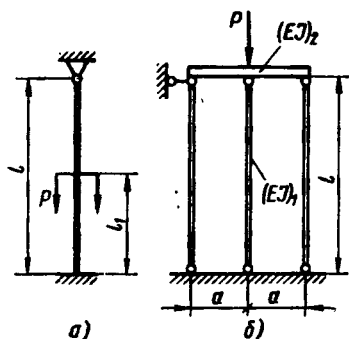


Рис. 3.11

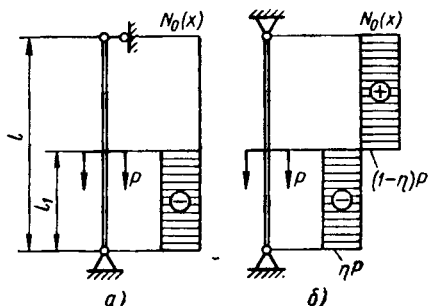


Рис. 3.12

тивления материалов формулу для сжимающей критической силы

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EJ v_1''^2 dx}{\int_0^l v_1'^2 dx},$$

где $v_1 = v_1(x)$ — функция, удовлетворяющая геометрическим граничным условиям задачи и доставляющая минимум значению $P_{кр}$.

Большинство авторов, излагая энергетический метод расчета на устойчивость сжатых стержней, считают условие нерастяжимости оси стержня (3.21) совершенно очевидным и пользуются им без всяких оговорок и ограничений. Однако нетрудно привести примеры, когда это условие нерастяжимости не может быть выполнено либо приводит к неверному результату. Так, например, стержень с закрепленными относительно осевых смещений торцами (рис. 3.11, а) не может потерять устойчивость без изменения длины оси. Если при исследовании устойчивости среднего стержня системы, показанной на рис. 3.11, б, считать его ось нерастяжимой, то это может привести к заниженному значению критической силы.

Рассмотрим решения нескольких задач устойчивости стержней энергетическим методом. Исследуем устойчивость шарнирно опертого стержня при двух вариантах закрепления верхнего конца в осевом направлении (рис. 3.12, а и б): 1) верхний конец может свободно смещаться в осевом направлении; 2) верхний конец закреплен неподвижно. Очевидно, и в том и в другом случае решение можно получить с помощью ряда

$$v_1(x) = \sum_{i=1}^N c_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (3.25)$$

удовлетворяющего всем граничным условиям задачи.

В первом случае приближенное решение удобно получать, представив изменение полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$ в форме С. П. Тимошенко, т. е. в форме (3.22), как это обычно делается в курсе «Сопротивление материалов». Приравнявая $\Delta\mathcal{E}$ нулю, находим

$$P = \frac{\int_0^l EJ v_1''^2 dx}{\int_0^{l_1} v_1'^2 dx}.$$

При $EJ = \text{const}$ и $l_1 = l/2$, ограничившись одним первым членом ряда (3.25), получим $P_{\text{кр}} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2} = 19,7 \frac{EJ}{l^2}$ (при точном решении $P_{\text{кр}} = 18,7 \frac{EJ}{l^2}$). Учитывая в выражении для $v_1(x)$ большее число членов ряда и минимизируя значение P по параметрам c_i , при произвольном законе изменения изгибной жесткости стержня $EJ(x)$ критическую нагрузку можно найти практически с любой степенью точности. Поскольку требуется определить функцию $v_1(x)$ только с точностью до масштаба, все параметры c_i удобно отнести к заведомо не равному нулю параметру c_1 и вести поиск минимума P по безразмерным параметрам $\bar{c}_i = \frac{c_i}{c_1}$, где $i = 2, 3, \dots, N$.

Во втором случае при неподвижно закрепленном верхнем конце стержня, как отмечено, потеря устойчивости без растяжения оси стержня невозможна. Поэтому при решении в форме С. П. Тимошенко нельзя определять осевые перемещения второго порядка малости $u_2(x)$ по зависимости (3.21). Для определения этих перемещений необходимо использовать более громоздкое выражение (3.23). Методически в таких случаях, видимо, более оправданно вести решение в форме Брайана, построив предварительно зависимость $N_0 = N_0(x)$. Тогда согласно зависимости (3.16) можно записать

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx - \frac{P}{2} \left[\eta \int_0^{l_1} v_1'^2 dx - (1 - \eta) \int_{l_1}^l v_1'^2 dx \right],$$

где η — коэффициент, зависящий от отношения l_1/l и закона изменения жесткости стержня на растяжение $EF = EF(x)$. Приравнявая $\Delta\mathcal{E}$ нулю, находим

$$P = \frac{\int_0^l EJ v_1''^2 dx}{\eta \int_0^{l_1} v_1'^2 dx - (1 - \eta) \int_{l_1}^l v_1'^2 dx}.$$

Дальнейшее решение ведем по описанной схеме: вводим безразмерные параметры $\bar{c}_i = \frac{c_i}{c_1}$ ($i = 2, 3, \dots, N$) и, минимизируя выражение для P при некотором конкретном числе варьируемых параметров, находим $P_{кр}$. Следует отметить особенность рассматриваемой задачи: эта задача не является положительно определенной (см. приложение I). При решении подобных задач приближенные методы следует применять с осторожностью. Если в данной задаче ограничиться одним членом ряда (3.25), то ошибка приближенного решения может оказаться сколь угодно большой. Так, например, для $l_1 = \frac{l}{2}$ и $\eta = \frac{1}{2}$, приняв $v_1 = \bar{c}_1 \sin \frac{\pi x}{l}$, получим бессмысленный результат $P_{кр} = \infty$. Поэтому решение следует начинать, по крайней мере, с двух членов ряда. В частности, тогда при $EJ = \text{const}$, $\frac{l_1}{l} = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$ получим

$$P = \frac{1}{2} \frac{EJ\pi^2}{l^3} \frac{c_1^2 + 16c_2^2}{4 c_1 c_2} = \frac{1}{2} \frac{EJ\pi^2}{l^2} \frac{3\pi}{4} \frac{1 + 16\bar{c}_2^2}{\bar{c}_2}.$$

Условие экстремума $P \left(\frac{dP}{d\bar{c}_2} = 0 \right)$ приводит к значению $\bar{c}_2 = \pm \frac{1}{4}$. Следовательно, приближенное значение критической силы

$$P_{кр} = \pm 3\pi \frac{EJ\pi^2}{l^2},$$

а форма изогнутой оси описывается функцией

$$v_{кр}(x) = \sin \frac{\pi x}{l} \pm \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

В полученных формулах знаки « $\pm$ » означают, что к потере устойчивости приводят силы, направленные вниз и вверх. В силу симметрии задачи абсолютные значения положительной и отрицательной критических нагрузок совпадают. В общем случае при отсутствии симметрии задачи получают два критических значения нагрузок, различных по абсолютной величине. Точное значение критической силы в рассматриваемой задаче равно $P_{кр} = \pm 8 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Приближенное решение задачи энергетическим методом практически не усложняется в случае, когда на стержень действуют распределенные продольные нагрузки типа собственного веса (рис. 3.13). Причем если потеря устойчивости возможна без растяжения оси стержня, то удобнее использовать критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко, в противном случае — в форме Брайана. Так, например, для изображенной на рис. 3.13, а задачи критическое значение распределенной нагрузки может быть най-

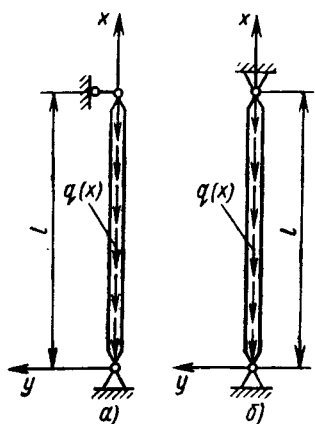


Рис. 3.13

дено из соотношения, следующего из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ и выражения (3.22)

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l q(x) \int_0^x v_1'^2 dx dx = 0,$$

где знак «—» взят в соответствии с направлением действующей нагрузки. При постоянных q и EJ , взяв $v_1(x)$ в виде первого члена ряда (3.25), из этого соотношения сразу получаем $(ql)_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2} = 19,7 \frac{EJ}{l^2}$ вместо точного значения $(ql)_{кр} = 18,5 \frac{EJ}{l^2}$.

Для задачи, представленной на рис. 3.13, б, критическое значение нагрузки, видимо, удобнее определять, используя выражение (3.16)

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N_0(x) v_1'^2 dx = 0.$$

При постоянной величине жесткости стержня на растяжение $EF(x) = \text{const}$ и при постоянной распределенной нагрузке $q = \text{const}$, в частности, имеем

$$N_0(x) = ql \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right).$$

И тогда, ограничившись двумя первыми членами ряда (3.25) [взяв один член ряда, опять приходим к абсурдному результату $(ql)_{кр} = \infty$], получим

$$(ql)_{кр} = \pm \frac{9\pi^2}{10} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \pm 8,87 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Взяв пять членов ряда, приходим к значению

$$(ql)_{кр} = \pm 8,43 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Это значение критической нагрузки можно считать точным (при дальнейшем увеличении числа членов ряда оно не изменяется).

Все такого типа задачи, конечно, можно решать при нагрузках, изменяющихся по произвольному закону $q = q(x)$, при переменных $EJ(x)$ и любых других граничных условиях.

В заключение заметим, что в тех случаях, когда мертвые внешние нагрузки передаются на стержень с помощью некоторых механизмов, в выражения изменения полной потенциальной энергии (3.16) и (3.17) войдут, естественно, дополнительные слагаемые.

Например, если мертвая сила P передается на стержень с помощью жесткого рычага длины a (см. рис. 3.3, а), то при изгибе стержня потенциал этой силы дополнительно изменится на величину $-P\lambda$, где $\lambda = \frac{1}{2} a v_1'^2 (l)$. Аналогично можно подсчитать дополнительные слагаемые и при других схемах передачи внешних сил на стержень (см., например, рис. 3.3).

§ 15. Стержни на упругом основании и упругих опорах

Задача устойчивости стержней, связанных с упругим основанием, представляет интерес, поскольку расчетные схемы такого рода широко используются на практике. Кроме того, решение этой задачи имеет методическое значение: сравнительно простая задача устойчивости стержня на упругом основании имеет особенности, характерные для многих более сложных задач устойчивости пластин и оболочек.

Ограничимся случаем так называемого винклеровского сплошного упругого основания, т. е. будем считать, что распределенная реакция упругого основания в каждой точке пропорциональна прогибу стержня в этой же точке и не зависит от прогибов на других участках стержня (рис. 3.14):

$$q_k = kv,$$

где $k = k(x)$ — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

С учетом сформулированных в § 13 основных допущений нетрудно вывести линейаризованное уравнение для рассматриваемой задачи. Выкладки аналогичны выкладкам, приведенным в § 13. Проектируя на ось y действующие на искривленный элемент стержня силы, необходимо только дополнительно учесть реакцию упругого основания $q_k = kv$. Окончательно вместо уравнения (3.4) получим следующее однородное уравнение:

$$(EJv'')'' - (N_0 v')' + kv = 0. \quad (3.26)$$

Граничные условия, очевидно, не зависят от того, связан стержень с упругим основанием или нет. Они определяются условиями закрепления и нагружения концов стержня. Поэтому граничные условия, которые приведены в § 13, полностью могут быть перенесены на случай стержней, связанных с упругим основанием.

Уравнение (3.26) справедливо для произвольно нагружен-

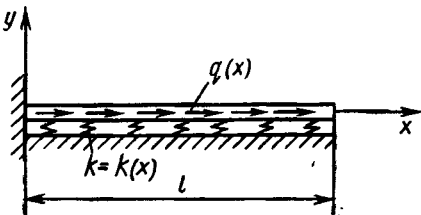


Рис. 3.14

ного в продольном направлении стержня переменной изгибной жесткости $EJ = EJ(x)$ и при переменном коэффициенте постели $k = k(x)$. В общем случае анализ этого уравнения затруднителен. Поэтому сначала рассмотрим стержень постоянной изгибной жесткости $EJ = \text{const}$, лежащий на упругом основании с коэффициентом постели $k = \text{const}$ и сжатый силой P . В этом случае $N_0 = -P$ и уравнение (3.26) принимает вид

$$EJv^{IV} + Pv'' + kv = 0. \quad (3.27)$$

Решение последнего уравнения с постоянными коэффициентами не составляет принципиальных трудностей. Наиболее простое решение уравнения (3.27) может быть найдено для шарнирно-опертого стержня. В этом случае граничными условиями являются: 1) $v(0) = 0$; 2) $v''(0) = 0$; 3) $v(l) = 0$; 4) $v''(l) = 0$. Выше рассмотрена задача устойчивости шарнирно-опертого стержня без упругого основания и для нее найдена полная система собственных функций

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться в том, что такой набор синусоид дает решение уравнения (3.27), удовлетворяющее граничным условиям. Поскольку система функций (3.28) полная, автоматически получаем полную систему собственных функций для рассматриваемой задачи. Каждая из собственных функций дает соответствующее собственное значение задачи. После сокращения общих множителей из уравнения (3.27) получим

$$EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - P_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + k = 0,$$

откуда

$$P_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 EJ + \frac{k}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2}. \quad (3.29)$$

Способ угадывания решений в задачах на собственные значения следует применять с осторожностью. Для гарантированного правильного решения необходимо использовать полную систему функций (как это сделано выше), иначе можно получить ошибочный результат. Например, если в рассматриваемой задаче взять решение просто в виде $v(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$, то ошибка в значении критической силы может оказаться сколь угодно большой.

В задачах устойчивости из всех собственных значений практический интерес представляет то, которое приводит к наименьшей нагрузке. Это наименьшее значение нагрузки является критическим. В отличие от задач, рассмотренных выше, в данной задаче первое собственное значение, соответствующее прогибу стержня

по одной полуволе синусоиды, не всегда приводит к наименьшей нагрузке.

Для дальнейшего анализа выражение (3.29) перепишем в безразмерном виде

$$\bar{P}_n = n^2 - \frac{\bar{k}}{n^2},$$

где

$$\bar{P} = \frac{P_n}{P_{кр}^0}; \quad P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}; \quad \bar{k} = \frac{kl^4}{\pi^4 EJ}.$$

Принимая последовательно $n = 1, n = 2, n = 3$ и т. д., получаем зависимости

$$\bar{P}_1 = 1 + \frac{\bar{k}}{1}; \quad \bar{P}_2 = 4 + \frac{\bar{k}}{4}; \quad \bar{P}_3 = 9 + \frac{\bar{k}}{9} \quad \text{и т. д.}$$

В координатах $\bar{P}, \bar{k}$ при различных n эти зависимости дают набор прямых (рис. 3.15, а). Участки прямых, лежащие ниже точек пересечения, дают наименьшие и, следовательно, критические значения безразмерной силы. Как видим, различным значениям жесткости упругого основания соответствуют разные критические числа полуволи, т. е. в зависимости от $\bar{k}$ меняется форма потери устойчивости стержня. Так, при $0 < \bar{k} < 4$ наименьшее собственное значение соответствует $n = 1$ и форма изогнутой оси стержня при потере устойчивости описывается одной полуволновой синусоиды $v_{кр} = \sin \frac{\pi x}{l}$.

При $4 < \bar{k} < 36$ наименьшее собственное значение соответствует $n = 2$; форма изогнутой оси стержня при потере устойчивости описывается функцией $v_{кр} = \sin \frac{2\pi x}{l}$ и т. д. Непрерывное изменение параметра $\bar{k}$ сопровождается скачкообразным качественным изменением формы потери устойчивости стержня.

На рис. 3.15, б тот же результат представлен в других координатах: по оси ординат отложена безразмерная сила $\frac{P}{\sqrt{kEJ}}$, по оси

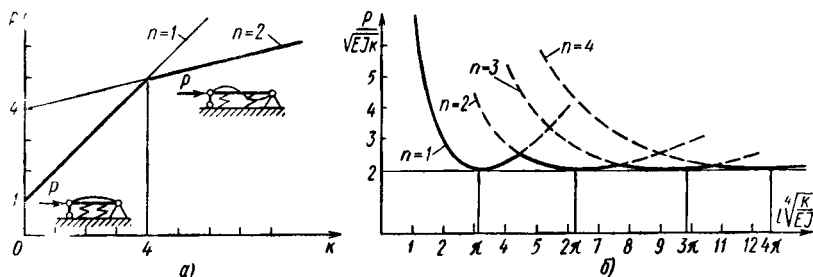


Рис. 3.15

абсцисс — безразмерная длина $l \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}$. Эти безразмерные величины связаны соотношением

$$\frac{P_n}{\sqrt{kEJ}} = \frac{\pi^2 n^2}{\left(l \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}\right)^2} + \frac{\left(l \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}\right)^2}{\pi^2 n^2}.$$

В отличие от случая стержня без упругого основания в рассматриваемой задаче не наблюдается монотонного уменьшения критической силы с увеличением длины стержня. При фиксированных значениях EJ и k на некоторых участках $P_{кр}$ возрастает с увеличением l . При $l > 10 \sqrt[4]{\frac{EJ}{k}}$ критическая сила практически перестает изменяться с увеличением длины стержня и $P_{кр} \approx 2 \sqrt{kEJ}$.

К последнему результату можно было прийти также с учетом следующих соображений. Когда при потере устойчивости по длине стержня образуется достаточно большое число полувольт n , величину $\eta = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, входящую в зависимость (3.29), можно условно считать непрерывно изменяющейся и искать минимум P_n , дифференцируя эту зависимость по η :

$$\frac{dP}{d\eta} = EJ - \frac{k}{\eta^2} = 0,$$

откуда находим

$$\eta_{кр} = \sqrt{\frac{k}{EJ}}; \quad P_{кр} = 2 \sqrt{kEJ},$$

Таким образом, при достаточно большом значении безразмерного параметра $l \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}$ критическая сила перестает зависеть от длины стержня, а потеря устойчивости происходит по такому числу полувольт, при котором длина одной полуволны примерно равна $\pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{k}}$.

Решение уравнения (3.27) при граничных условиях, отличных от условий шарнирного опирания, приводит к аналогичным результатам, но технически более громоздко. В общем случае решение этого однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами следует искать в виде $v(x) = Ae^{ix}$, что приводит к характеристическому уравнению $EJr^4 + Pr^2 + k = 0$. Четыре корня этого биквадратного уравнения дают возможность представить общее решение исходного уравнения в виде суммы четырех функций с произвольными постоянными A_i :

$$v(x) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{i x}.$$

Подчинив общее решение четырем заданным граничным условиям задачи, для постоянных A_i получим систему четырех линейных однородных алгебраических уравнений. Равенство нулю определителя этой системы уравнений приводит к уравнению, доставляющему собственные значения задачи P_n , наименьшее из которых равно $P_{кр}$.

Не анализируя различные возможные варианты решения уравнения (3.26), отметим, что когда $P > 2\sqrt{kEJ}$, общее решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$v(x) = A_1 \sin m_1 x + A_2 \cos m_1 x + A_3 \sin m_2 x + A_4 \cos m_2 x,$$

где

$$m_{1,2} = \sqrt{\frac{P}{2EJ}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kJ}{P^2}}}.$$

На основании результата решенной выше задачи можно утверждать, что условие $P_{кр} > 2\sqrt{kEJ}$ выполняется, если запрещены поперечные перемещения обоих торцов стержня. В этом случае независимо от двух других граничных условий с увеличением безразмерной длины стержня критическая сила стремится (сверху) к величине $P_{кр} = 2\sqrt{kEJ}$. Однако если хотя бы на одном из концов стержня поперечные перемещения не стеснены, то с увеличением безразмерной длины критическая сила стремится к величине $P_{кр} = \sqrt{kEJ}$.

До сих пор рассматривались упругие стержни на абсолютно жестких опорах, хотя в действительности всякая реальная опора обладает той или иной податливостью. В задачах устойчивости однопролетных стержней жесткости упругих опор должны учитываться при составлении граничных условий. Например, на рис. 3.16, а показан стержень, один конец которого оперт на упругую опору жесткости c_p , другой конец упруго заделан, причем

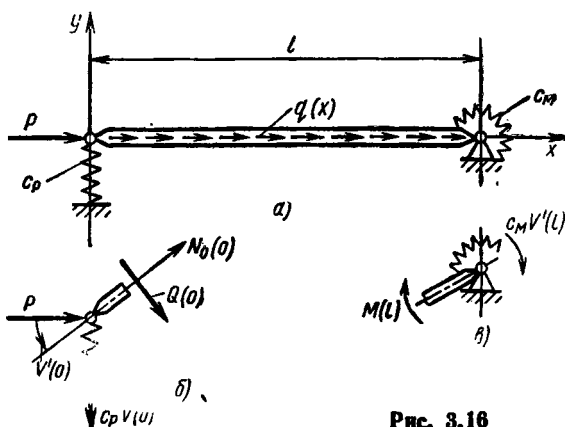


Рис. 3.16

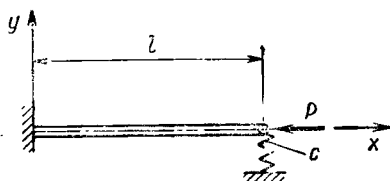


Рис. 3.17

жесткость заделки при повороте конца равна c_M . При формулировке граничных условий следует рассматривать равновесие конечного элемента стержня в отклоненном состоянии. Так, проектируя на ось y все силы, действующие на элемент стержня у левого торца (рис. 3.16, б), и учитывая, что

перемещение вызывает в упругой опоре реакцию $c_P v(0)$, при $x = 0$ получаем граничное условие

$$\vartheta(0) N_0(0) - Q(0) - c_P v(0) = 0.$$

Равенство нулю суммы моментов, действующих на элемент стержня у правого торца (рис. 3.16, в), при $x = l$ дает граничное условие $M(l) + c_M \vartheta(l) = 0$, поскольку угол поворота $\vartheta(l)$ вызывает в упругой заделке момент, равный $c_M \vartheta(l)$. Два других граничных условия очевидны. Учитывая, что в рассматриваемом примере $N_0(0) = -P$, окончательно можно записать следующие четыре граничных условия 1) $v''(0) = 0$; 2) $v'(0)P + [EJv''(0)]' + c_P v(0) = 0$; 3) $v(l) = 0$; 4) $EJv''(l) + c_M v'(l) = 0$. Дальнейшая общая схема решения такая же, как и для стержней на абсолютно жестких опорах.

Определим, например, критическую силу и форму потери устойчивости стержня, изображенного на рис. 3.17, считая изгибную жесткость EJ постоянной. В данном случае (упругое основание не вводим) общее уравнение (3.4) принимает вид

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0; \quad k^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Граничные условия задачи 1) $v(0) = 0$; 2) $v'(0) = 0$; 3) $v''(l) = 0$; 4) $EJv'''(l) + Pv'(l) - cv(l) = 0$. Общее решение уравнения

$$v(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 x + A_4.$$

Подчиняя это общее решение четырем граничным условиям задачи, получаем систему четырех однородных линейных уравнений относительно четырех произвольных постоянных A_i . Как отмечалось, для получения характеристического уравнения обычно удобнее не приравнивать нулю определитель однородной системы уравнений, а последовательно исключать из этой системы произвольные постоянные. В соответствии с этим выпишем три первых уравнения, следующие из трех первых граничных условий:

$$A_2 + A_4 = 0;$$

$$kA_1 + A_3 = 0;$$

$$-k^2 \sin kl A_1 - k^2 \cos kl A_2 = 0.$$

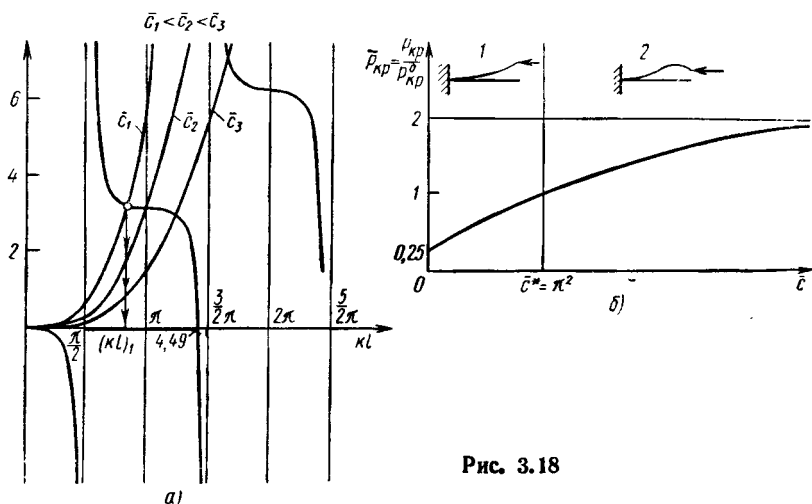


Рис. 3.18

Откуда $A_4 = -A_2$, $A_1 = -A_2 \operatorname{ctg} kl$, $A_3 = kA_2 \operatorname{ctg} kl$. Следовательно, решение можно записать в виде

$$v(x) = A_2 (-\operatorname{ctg} kl \sin kx + \cos kx + kx \operatorname{ctg} kl - 1). \quad (3.30)$$

После определения собственных значений $(kl)_n$ из этого выражения находим соответствующие собственные функции задачи, причем собственная функция, соответствующая критическому значению $P_{кр}$, описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости.

Подчинив функцию (3.30) четвертому граничному условию и полагая $A_2 \neq 0$, получим характеристическое уравнение, доставляющее собственные значения задачи; после несложных преобразований характеристическому уравнению можно придать следующий вид:

$$\frac{(kl)^3}{\bar{c}} = kl - \operatorname{tg} kl.$$

При этом введена безразмерная жесткость упругой опоры

$$\bar{c} = \frac{c l^3}{EJ}.$$

На рис. 3.18, а показано графическое определение первого корня характеристического уравнения. В частности, при $\bar{c} = 0$ и $\bar{c} \rightarrow \infty$ получаем, как и следовало ожидать, известные значения $(kl_1) = \frac{\pi}{2}$ и $(kl)_1 = 4,49$, соответствующие второму и пятому случаям, показанным на рис. 3.5. Результат решения характеристического уравнения представлен на рис. 3.18, б, где показано, во сколько раз критическая сила в данной задаче отличается от крити-

ческой силы шарнирно-опертого стержня той же длины: $\bar{P}_{кр} = P_{кр}/P_{кр}^0$, где $P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

При разной безразмерной жесткости $\bar{c}$ формы потери устойчивости оказываются качественно различными, причем при непрерывно изменяющихся значениях $\bar{c}$ качественная смена форм потери устойчивости происходит скачкообразно. Проследим за сменой форм потери устойчивости. При $\bar{c} = 0$ и $\bar{c} \rightarrow \infty$ имеем заведомо качественно разные формы потери устойчивости. Переход от одной формы потери устойчивости к другой в данной задаче можно установить по смене знака первой производной $v'(l)$. Из выражения (3.30) следует

$$v'(l) = A_2 k (-\operatorname{ctg} kl \cos kl - \sin kl + \operatorname{ctg} kl) = A_2 k \frac{\cos kl - 1}{\sin kl}.$$

Первое собственное значение $(kl)_1$ изменяется в диапазоне $\frac{\pi}{2} < (kl)_1 < 4,49$, поэтому $\cos(kl)_1 < 0$ и единственная смена знака $v'(l)$ произойдет при $(kl)_1 = \pi$, когда меняется знак $\sin(kl)_1$. Этому значению $(kl)_1 = \pi$ соответствует $\bar{c}_* = \pi^2$. Таким образом, при $\bar{c} < \bar{c}_*$ стержень теряет устойчивость по форме 1, при $\bar{c} > \bar{c}_*$ — по форме 2 (рис. 3.18, б).

Задавшись допустимой погрешностью определения критической силы, из полученного решения можно найти то значение безразмерной жесткости упругой опоры $\bar{c}_\infty$, при превышении которого опору можно считать абсолютно жесткой. Например, при допустимой погрешности порядка 5% получим $\bar{c}_\infty \approx 50$.

Остановимся на расчете многопролетных стержней с несколькими упругими промежуточными опорами (рис. 3.19, а). Решение этой задачи при переменных $EJ(x)$, $k(x)$, $N_0(x)$ можно вести методом начальных параметров. Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ формулируются так же, как и для однопролетных стержней. Жесткость промежуточных опор учитывается следующим образом. Из условия равновесия элемента стержня над i -й опорой (рис. 3.19, б) следует, что

$$Q^+(x_i) = Q^-(x_i) - c_i v(x_i), \quad (3.31)$$

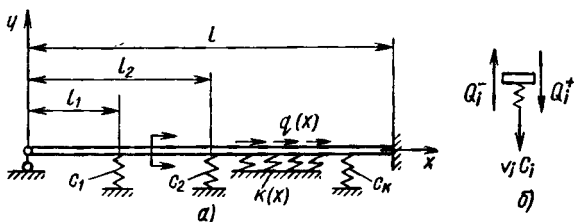


Рис. 3.19

где $Q^+(x_i)$ и $Q^-(x_i)$ — соответственно поперечные силы слева и справа над i -й опорой; $v(x_i)$ — перемещение над i -й опорой; c_i — жесткость этой опоры.

Вектор состояния, характеризующий перемещения и внутренние усилия в сечениях стержня, примем в виде

$$y = \begin{pmatrix} v \\ \vartheta \\ M \\ Q \end{pmatrix}.$$

Тогда получим матричное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - Ay = 0, \quad (3.32)$$

где

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k(x) & -q(x) & \frac{N_0}{EJ(x)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Схема интегрирования уравнения (3.32) сохраняется прежней, но при переходе через каждую опору следует дополнительно учитывать зависимость (3.31), которую можно записать в виде матрицы перехода

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тех случаях когда $k = 0$ (стержень без упругого основания), применим метод начальных параметров, однако при $k \neq 0$ он может не обеспечить необходимой точности расчета, поэтому целесообразнее пользоваться одним из вариантов метода прогонки [12, 18].

Задачу устойчивости стержней на упругих основаниях и опорах можно решать и энергетическим методом. Для этого в выражении изменения полной потенциальной энергии должны быть учтены энергия упругого основания и энергия деформации упругих опор. Записывая выражение изменения полной энергии, например в форме Брайана, получим

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k(x) v^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K c_i v^2(x_i) + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 y'^2 dx,$$

где K — число упругих опор.

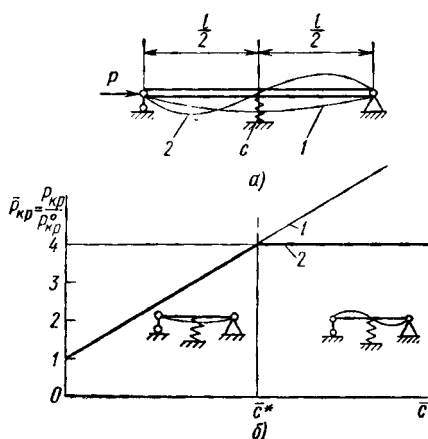


Рис. 3.20

рии задачи всегда возможна потеря устойчивости по форме 2, при которой упругая опора не деформируется. Для формы 1 критическую силу можно получить, задавая прогиб в виде ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Причем, ограничившись даже одним членом ряда, можно быть уверенным в том, что существенной качественной ошибки в значении $P_{кр}$ не будет. Действительно, учитывая, что в рассматриваемой задаче $N_0 = -P$, из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ находим

$$P_{кр}^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + 2 \frac{cl}{\pi^2} = P_{кр}^0 \left(1 + \frac{2\bar{c}}{\pi^4} \right);$$

где

$$P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad \bar{c} = \frac{cl^3}{EJ}.$$

Для формы 2 можно записать, что

$$P_{кр}^{(2)} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = 4P_{кр}^0.$$

Полученные результаты иллюстрируются графиком (рис. 3.20, б). При $\bar{c} < \bar{c}_*$ реализуется форма 1. Причем с ростом $\bar{c}$ увеличивается $P_{кр}^{(1)} = P_{кр}^{(1)} = P_{кр}^0 \left(1 + \frac{2\bar{c}}{\pi^4} \right)$. При $\bar{c} > \bar{c}_*$ реализуется форма 2 и $P_{кр} = P_{кр}^{(2)} = 4P_{кр}^0$ независимо от жесткости упругой опоры. Жесткость упругой опоры $\bar{c}_*$, при которой происходит смена форм потери устойчивости, находим из условия $P_{кр}^{(1)} = P_{кр}^{(2)}$. Так,

Однако энергетический метод может дать хорошее приближенное решение при небольшом числе членов ряда только тогда, когда имеется полная физическая ясность в задаче, т. е. когда полностью ясна качественная картина потери устойчивости. Например, для шарнирно-опертого стержня с одной симметрично расположенной промежуточной упругой опорой (рис. 3.20, а) нетрудно представить себе, что при малой жесткости опоры c стержень теряет устойчивость по форме 1, близкой к одной полуволне синусоиды. Кроме того, в силу симметрии

ограничиваясь только одним членом ряда, получаем $\bar{c}_* = \frac{3\pi^4}{2}$. Точное значение $\bar{c}_* = 16\pi^2$.

При решении задачи энергетическим методом не всегда удастся получить надежный результат. Например, даже для внешне несложной задачи, изображенной на рис. 3.21, невозможно предугадать форму потери устойчивости и, следовательно, трудно подобрать подходящую систему аппроксимирующих функций. При этом решение задачи не облегчается, если известно точное ее решение для какого-нибудь конкретного значения ее параметров, поскольку незначительное изменение этих параметров может привести к резкой качественной смене формы потери устойчивости.

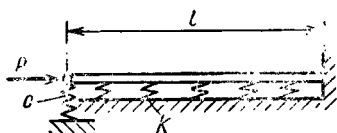


Рис. 3.21

§ 16. Учет деформаций сдвига; общая и местная устойчивость трехслойных и тонкостенных стержней

Выше при выводе основного линейаризованного уравнения использовалась обычная теория изгиба балок, не учитывающая влияния деформаций сдвига, вызываемых поперечными силами. Рассмотрим вариант решения задачи устойчивости прямого стержня с учетом влияния деформаций сдвига. Воспользуемся расчетной схемой балки, предложенной С. П. Тимошенко. Согласно этой схеме плоские сечения, до деформации балки нормальные к ее оси, остаются плоскими и после изгиба балки, но перестают быть нормальными к ее изогнутой оси. Таким образом, в схеме С. П. Тимошенко положение каждого сечения деформированной балки определяется двумя независимыми величинами: поперечным перемещением v и углом поворота сечения ϑ (рис. 3.22). Угол сдвига равен $\gamma = \vartheta - \nu'$, где ν' — угол поворота нормали к оси балки.

Внутренний изгибающий момент и поперечная сила в балке С. П. Тимошенко определяются зависимостями

$$M = EJ\vartheta'; \quad Q = GF\gamma = GF(\vartheta - \nu'), \quad (3.33)$$

где EJ — обычная изгибная жесткость балки; G — модуль сдвига; F — площадь поперечного сечения*.

Для вывода основных уравнений и граничных условий воспользуемся энергетическим критерием в форме Брайана (см. § 14).

* Обычно поперечную силу в балке С. П. Тимошенко определяют с помощью зависимости $Q = GF\gamma/\kappa$, где κ — коэффициент, имеющий порядок единицы, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению балки и зависящий от формы сечения. Здесь этот коэффициент не введен по причинам, которые будут ясны из дальнейшего.

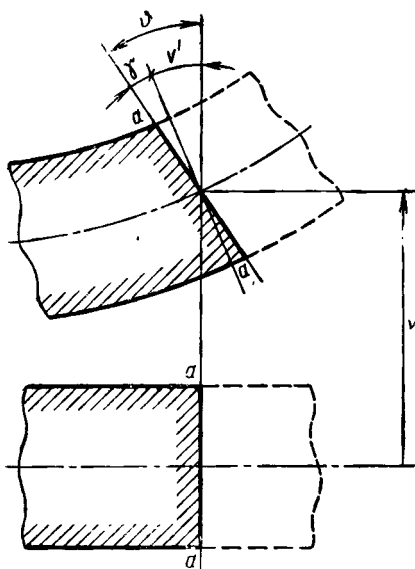


Рис. 3.22

Но теперь при подсчете изменения полной потенциальной энергии следует дополнительно учесть потенциальную энергию деформаций сдвига, а потенциальную энергию изгиба в соответствии с зависимостью (3.33) выразить через угол ϑ . Тогда получим

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{i}{2a} \int_0^l (EJ\vartheta'^2 + GF\gamma^2 + N_0 v'^2) dx \quad (3.34)$$

при дополнительном условии связи

$$\vartheta - v' - \gamma = 0, \quad (3.35)$$

где $N_0 = N_0(x)$ — начальное осевое усилие в стержне.

Применив метод множителей Лагранжа (см. приложение II),

сведем задачу определения стационарных значений функционала (3.34) с дополнительным условием связи (3.35) к задаче определения стационарных значений вспомогательного функционала

$$\Phi^* = \int_0^l \left[\frac{1}{2} (EJ\vartheta'^2 + GF\gamma^2 + N_0 v'^2) + \lambda(x) (\vartheta - v' - \gamma) \right] dx,$$

где $\lambda(x)$ — функциональный множитель Лагранжа.

Из условия $\delta\Phi^* = 0$ получим

$$\int_0^l [EJ\vartheta'\delta\vartheta' + GF\gamma\delta\gamma + N_0 v'\delta v' + \lambda(x) (\delta\vartheta - \delta v' - \delta\gamma)] dx = 0.$$

Последовательное интегрирование по частям дает

$$\int_0^l \{ [-(EJ\vartheta')' + \lambda(x)] \delta\vartheta + [GF\gamma - \lambda(x)] \delta\gamma + [-(N_0 v')' + \lambda'(x)] \delta v \} dx + EJ\vartheta'\delta\vartheta|_0^l + [N_0 v' - \lambda(x)] \delta v|_0^l = 0. \quad (3.36)$$

Приравнявая нулю множители при вариациях $\delta\vartheta$, $\delta\gamma$, δv в подинтегральном выражении, приходим к трем уравнениям:

$$(EJ\vartheta')' - \lambda(x) = 0;$$

$$GF\gamma - \lambda(x) = 0;$$

$$(N_0 v')' - \lambda'(x) = 0.$$

Учитывая условие связи (3.35), получаем два уравнения относительно поперечного перемещения v и угла поворота сечения ϑ . В данном случае функциональный множитель Лагранжа оказался равен поперечной силе ($\lambda(x) = GFv = Q$)

$$(EJ\vartheta')' - GF(\vartheta - v') = 0;$$

$$[GF(\vartheta - v')] - (N_0 v')' = 0. \quad (3.37)$$

Кроме того, из условия (3.36) находим возможные варианты однородных граничных условий задачи при $x = 0$ и $x = l$:

$$EJ\vartheta' = 0, \text{ т. е. } M = 0, \text{ либо } \vartheta = 0; \quad (3.38)$$

$$N_0 v' - GF(\vartheta - v') = 0, \text{ т. е. } N_0 v' - Q = 0, \text{ либо } v = 0.$$

Приведенный громоздкий вывод уравнений (3.37) и граничных условий (3.38) имеет одно решающее преимущество: энергетический подход дает возможность получить строго обоснованные варианты граничных условий задачи. В задачах такого типа с особой тщательностью следует относиться к формулировке граничных условий. Так, например, привычное условие в заделке $v' = 0$ для балки С. П. Тимошенко является неправильным, однако его часто используют.

Для стержня постоянного поперечного сечения, сжатого по торцам силой P , систему уравнений (3.37) можно записать в виде

$$EJ\vartheta'' - GF(\vartheta - v') = 0; \quad (3.39)$$

$$GF(\vartheta' - v'') + Pv'' = 0.$$

При заданных граничных условиях отсюда можно найти собственные функции задачи и собственные значения P_n , наименьшее из которых равно $P_{кр}$. Наиболее просто решение получается для шарнирно-опертого стержня при граничных условиях: 1) $v(0) = 0$; 2) $\vartheta'(0) = 0$; 3) $v(l) = 0$; 4) $\vartheta'(l) = 0$. В этом случае решение системы (3.39) можно искать в следующем виде:

$$v = A \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$\vartheta = B \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Подставив эти функции в систему уравнений (3.39) и сократив общие множители, получим систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных A и B :

$$- \left[EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + GF \right] B + GF \left(\frac{n\pi}{l} \right) A = 0;$$

$$GF \left(\frac{n\pi}{l} \right) B + (P - GF) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 A = 0.$$

Из условия существования отличных от тождественного нуля решений следует, что

$$B = \frac{\frac{n\pi}{l}}{1 + \frac{EJ}{GF} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} A;$$

$$P_n = \frac{1}{\frac{1}{GF} + \frac{1}{(n^2 \pi^2 EJ/l^2)}}.$$

Наименьшее собственное значение P_n получается при $n = 1$, критическая сила

$$P_{кр} = P_1 = \frac{P_{кр}^0}{1 + \frac{P_{кр}^0}{GF}}, \quad (3.40)$$

где $P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ — критическая сила для того же стержня, подсчитанная без учета влияния деформаций сдвига.

Деформации стержня при потере устойчивости описываются собственными функциями, соответствующими $n = 1$ (с точностью до масштаба):

$$v_{кр} = A \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$\vartheta_{кр} = \frac{\frac{\pi}{l}}{1 + \frac{P_{кр}^0}{GF}} A \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (3.41)$$

Рассмотрим, как изменяется критическая сила при учете деформаций сдвига. Как известно, для изотропного материала $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, где μ — коэффициент Пуассона. Поэтому, если стержень изготовлен из изотропного материала, то в соответствии с формулой (3.40) учет деформаций сдвига дает поправку по сравнению с единицей)

$$\frac{P_{кр}^0}{GF} = 2(1+\mu) \frac{\sigma_{кр}^0}{E} = 2(1+\mu) \epsilon_{кр}^0, \quad (3.42)$$

где $\sigma_{кр}^0$ и $\epsilon_{кр}^0$ — критические напряжение и удлинение (укорочение) стержня, подсчитанные без учета деформаций сдвига.

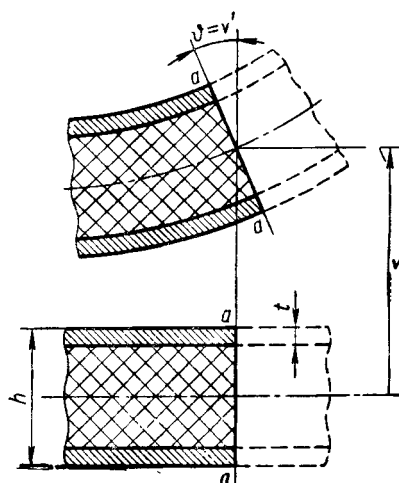
Для упругих конструкционных материалов эта поправка пренебрежимо мала по сравнению с единицей. Поэтому для стержней из изотропного материала учет деформаций сдвига при определении критических нагрузок не имеет практического значения. Более

того, для случая изотропного материала формула (3.40) вообще незаконна: поправка, вносимая за счет учета деформаций сдвига, выходит за пределы точности, обеспечиваемой основными допущениями (см. § 7).

Но учет деформаций сдвига может оказаться существенным для стержней, изготовленных из анизотропных материалов, у которых $G \ll E$ (такими свойствами обладают, например, некоторые композиционные волокнистые материалы). Зависимости типа (3.40) широко используют также в расчетах на устойчивость различных решетчатых стержней [37]. Особенно важное значение учет деформаций сдвига имеет в задачах устойчивости трехслойных стержней. Этот вопрос рассмотрим подробнее.

Для увеличения изгибной жесткости тонкостенных элементов конструкций широко используют трехслойные пластины, панели и оболочки. В них два несущих тонких слоя из высокопрочного и жесткого материала (металл, стеклопластик, боро- или углепластик и т. д.) разделены толстым слоем значительно более легкого и менее прочного заполнителя (пенопласт, соты, гофры и т. д.). Внешние нагрузки воспринимаются в основном за счет напряжений в несущих высокопрочных слоях. Роль заполнителя сводится к обеспечению совместной работы всего пакета при поперечном изгибе. Основные особенности расчета на устойчивость таких элементов конструкций выявляются при рассмотрении простейшего примера определения критических нагрузок сжатого трехслойного стержня.

Расчет трехслойного стержня на устойчивость без учета влияния деформаций сдвига почти не отличается от расчета обычного стержня. В этом случае гипотезу плоских сечений считают справедливой для всего пакета слоев (рис. 3.23). Тогда изгибная жесткость трехслойного стержня равна



$$(EJ)_{\Sigma} = \frac{E_1 b [h^3 - (h - 2t)^3]}{12} + \frac{E_3 b (h - 2t)^3}{12} = \frac{E_1 b h^2 t}{2} \times \left(1 - 2 \frac{t}{h} + \frac{4}{3} \frac{t^3}{h^3} \right) + \frac{E_3 b h^3}{12} \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3,$$

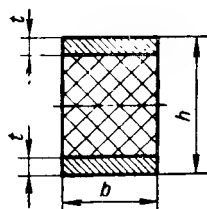


Рис. 3.23

где E_n и E_s — модули упругости материалов наружных несущих слоев и слоя заполнителя. В остальном все уравнения и окончательные расчетные зависимости задач устойчивости обычных стержней полностью используются в задачах устойчивости трехслойных стержней.

В тех случаях, когда жесткостные характеристики слоя заполнителя существенно ниже жесткостных характеристик несущих слоев, упрощенный расчет может привести к существенно завышенным значениям критических нагрузок.

Рассмотрим простейшую расчетную схему трехслойной балки, позволяющую учесть влияние деформаций сдвига слоя заполнителя. Положим, что средний слой (слой заполнителя) работает на поперечный изгиб как балка С. П. Тимошенко (см. рис. 3.22), а тонкие несущие слои — только на растяжение — сжатие. Собственной изгибной жесткостью слоев при изгибе всего трехслойного стержня пренебрегаем. Если принять $t \ll h$ и считать, что при изгибе стержня нет проскальзывания между его слоями, вместо зависимостей (3.33) получим

$$\left. \begin{aligned} M &= \left(E_s \frac{bh^3}{12} + E_n \frac{bh^3 t}{2} \right) \vartheta'; \\ Q &= G_s b h \gamma = G_s b h (\vartheta - \vartheta'), \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где индексы «з» и «н» относятся соответственно к упругим характеристикам материала заполнителя и несущих слоев. Все уравнения и формулы, описывающие потерю устойчивости балки С. П. Тимошенко, остаются в силе, однако следует положить $F = bh$, а изгибную жесткость EJ заменить на

$$(EJ)_\Phi = \left(E_n \frac{bh^3 t}{2} + E_s \frac{bh^3}{12} \right). \quad (3.44)$$

В частности для шарнирно-опертого стержня вместо формулы (3.40) получим

$$P_{кр} = \frac{P_{кр}^0}{1 + \frac{P_{кр}^0}{G_s b h}}, \quad (3.45)$$

где

$$P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 (EJ)_\Phi}{l^2}.$$

В выражении для изгибной жесткости трехслойного стержня (3.44) жесткостью слоя заполнителя часто можно пренебречь и считать $(EJ)_\Phi = \frac{1}{2} E_n b h t^3$.

Рассмотренную модель трехслойного стержня можно несколько усложнить и тем самым расширить область ее применимости, если кроме жесткости несущих слоев на растяжение-сжатие дополни-

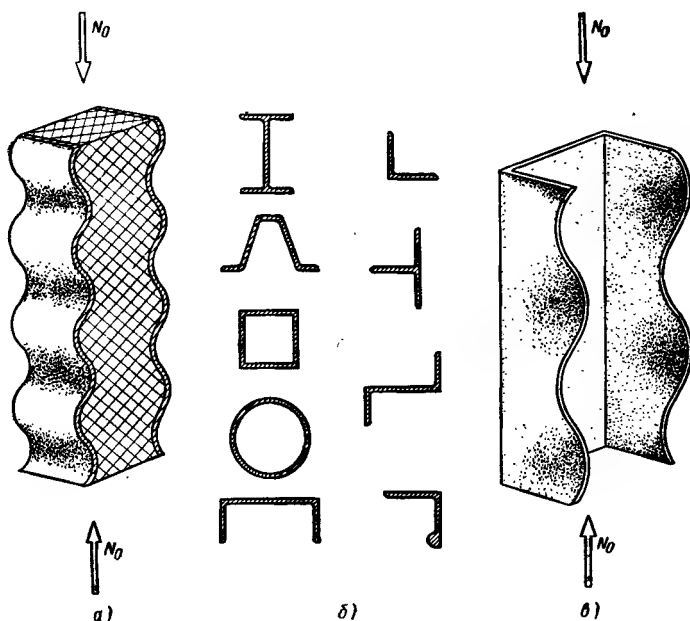


Рис. 3.24

тельно учесть их собственную изгибную жесткость. Дальнейшее уточнение расчетной модели трехслойного стержня может быть получено, если наряду с продольными деформациями и сдвигами ввести в рассмотрение поперечные деформации слоя заполнителя [8, 20].

Приведенное выше решение описывает потерю устойчивости трехслойного стержня, связанную с общим искривлением его оси. Потерю устойчивости такого типа обычно называют *общей потерей устойчивости*. Но для трехслойных элементов конструкции, в том числе и для трехслойного стержня, возможна потеря устойчивости («сморщивание») несущих слоев; потерю устойчивости такого типа обычно называют *местной потерей устойчивости* (рис. 3.24, а). Критические нагрузки, соответствующие местной потере устойчивости, практически не зависят от длины стержня и граничных условий на его торцах, а определяются изгибной жесткостью несущих слоев и жесткостными характеристиками и конструкцией заполнителя [19, 33].

Общая и местная устойчивость тонкостенных стержней. Для облегчения силовых конструкций, работающих на сжатие, широко используют тонкостенные стержни разнообразных поперечных сечений. Типичные формы поперечных сечений таких стержней показаны на рис. 3.24, б. Тонкостенные стержни можно применять в качестве самостоятельно работающих элементов и элементов жесткости, подкрепляющих тонкие пластины и оболочки. В том и

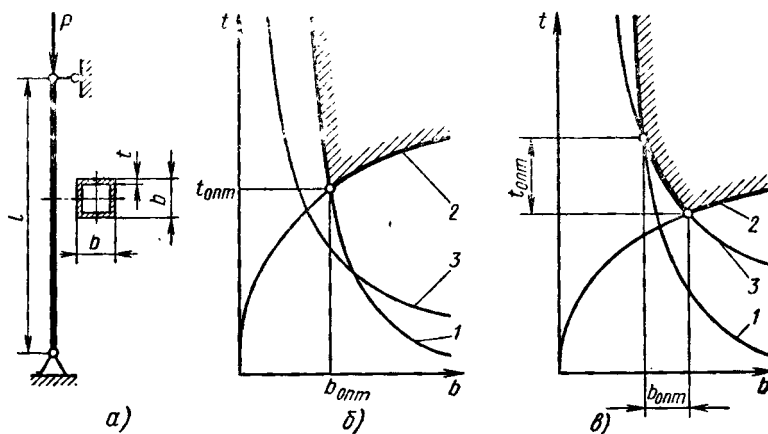


Рис. 3.25

в другом случае возможны две качественно различные формы потери устойчивости тонкостенного стержня: местная потеря устойчивости тонкой стенки (рис. 3.24, в) и общая потеря устойчивости, связанная с искривлением оси стержня.

Для большинства реальных конструкций недопустима ни та, ни другая форма потери устойчивости. Развитие местной формы потери устойчивости обычно вызывает общее искривление оси стержня, а развитие общей формы потери устойчивости приводит к местной изгибной деформации стенки стержня.

Проектирование рациональной тонкостенной конструкции обычно сводится к поиску разумного компромисса между противоречивыми требованиями по обеспечению ее местной и общей устойчивости. Рассмотрим, например, стойку с постоянным по длине тонкостенным квадратным поперечным сечением, нагруженную силой P (рис. 3.25, а). Если считать $b \gg t$, то площадь поперечного сечения и момент инерции соответственно будут равны $F = 4bt$ и $J = \frac{2}{3} b^3 t$.

Критическая сила, соответствующая общей потере устойчивости, очевидно, определяется по формуле:

$$P_{кр}^{\text{об}} = C \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \frac{2}{3} C \frac{\pi^2 E}{l^2} b^3 t, \quad (3.46)$$

где C — коэффициент, зависящий от граничных условий на торцах стержня (для шарнирно-опертого стержня $C = 1$).

Критическая сила, соответствующая местной потере устойчивости стенки, равна

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F = K_{\sigma} \frac{\pi^2 E t^3}{12(1-\mu^2)b^2} F = K_{\sigma} \frac{\pi^2 E}{3(1-\mu^2)} \frac{t^3}{b}, \quad (3.47)$$

где $\sigma_{кр}^м$ — критическое сжимающее напряжение стенки, рассматриваемой как удлиненная сжатая в одном направлении пластина (см. § 21). При $l \gg b$ коэффициент K_σ не зависит от способа закрепления торцов стойки. При квадратном поперечном сечении в силу симметрии каждая стенка теряет устойчивость как шарнирно-опертая по длинным сторонам тонкая пластина, поэтому следует принять $K_\sigma = 4$.

Для нормальной работы стойки необходимо выполнение условий $P_{кр}^{об} > P$ и $P_{кр}^м > P$, а также условия прочности. Например, если материал обладает резко выраженным пределом текучести, то можно потребовать выполнение условия $\sigma_s > \sigma$, где σ_s — предел текучести материала. (В случае хрупкого материала вместо предела текучести можно взять предел прочности при сжатии).

Учитывая выражения (3.46) и (3.47) и ограничение по прочности, можно сформулировать задачу выбора рациональных размеров поперечного сечения стойки: для заданных l и P найти значения b и t , обеспечивающие минимальный вес стойки при выполнении условий:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad b^3 t &\geq \frac{P}{\frac{3}{2} \frac{\pi^2 E}{l^2}}; \\ 2) \quad \frac{t^3}{b} &\geq \frac{P}{\frac{4}{3} \frac{\pi^2 E}{(1-\mu^2)}}; \\ 3) \quad bt &\geq \frac{P}{4\sigma_s}. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

При выбранном материале требование минимального веса, очевидно, эквивалентно требованию минимальной площади поперечного сечения стойки $F = 4bt$.

На рис. 3.25, б и в показаны кривые (3.48), ограничивающие область допустимых значений размеров поперечного сечения b и t . Возможны два случая взаимного расположения этих кривых. Для относительно длинных и слабо нагруженных стоек кривая 3 проходит ниже точки пересечения двух других кривых. Эта точка соответствует значениям $b_{опт}$ и $t_{опт}$, обеспечивающим минимальный вес стойки. Для относительно коротких и сильно нагруженных стоек точка пересечения двух первых кривых лежит ниже кривой 3. Тогда, как нетрудно видеть, существуют различные комбинации значений $b_{опт}$ и $t_{опт}$, приводящие к одному и тому же минимальному весу стойки.

Аналогично зависимость веса тонкостенного стержня от размеров его поперечного сечения можно исследовать при другой форме поперечного сечения. Следует подчеркнуть, что чем меньше внешние нагрузки, тем труднее создать рациональную тонкостенную конструкцию, работающую на сжатие.

§ 17. Закритическое деформирование упругих стержней

Линеаризованные уравнения, использованные выше при решении задач устойчивости стержней, дают возможность находить собственные функции задачи и собственные значения параметра нагрузки. Наименьшее собственное значение равно критическому значению нагрузки, а соответствующая ему собственная функция описывает форму изогнутой оси стержня в окрестностях первой точки бифуркации. Но однородное линеаризованное уравнение не может дать никакой информации о характере критической точки бифуркации и о поведении стержня при конечных прогибах после потери устойчивости.

Аналогично, решая задачи устойчивости энергетическим методом и ограничиваясь в выражении для изменения потенциальной энергии квадратичными по отношению к величинам поперечных перемещений слагаемыми, находили только критические нагрузки и соответствующие им собственные функции. Характер критической точки бифуркации и поведение стержня при конечных прогибах после потери устойчивости оставались неизвестными. Для того чтобы определить их, необходимо рассмотреть задачу устойчивости стержня в нелинейной постановке.

Задача нелинейного деформирования гибких стержней изучена достаточно полно; в ряде случаев решение удается получить в табулированных функциях. Например, для стержня постоянного поперечного сечения, сжатого мертвой силой P , решение получается в эллиптических интегралах [19].

Воспользуемся приближенным энергетическим приемом решения, позволяющим исследовать закритическое поведение любого произвольно нагруженного стержня, если для него известно решение линейной задачи. При этом ограничимся малыми по сравнению с длиной стержня прогибами, поскольку только они представляют интерес в силовых конструкциях.

Сначала рассмотрим характерный для большинства практических задач случай, когда после потери устойчивости один из торцов стержня может беспрепятственно смещаться в продольном направлении (рис. 3.26). Тогда закритическое деформирование состоит в изгибе стержня. При этом ось стержня можно считать нерастяжимой. Из условия нерастяжимости оси стержня легко выразить продольные перемещения u через угол наклона

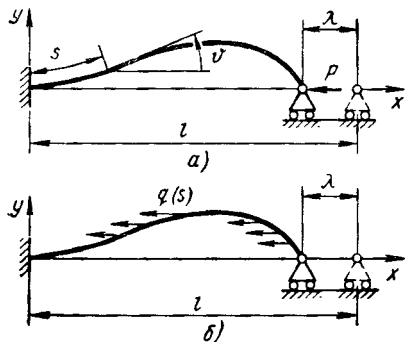


Рис. 3.26

касательной к упругой линии ϑ . Если, например, на левой опоре $u = 0$, то

$$u(s) = - \int_0^s (1 - \cos \vartheta) ds, \quad (3.49)$$

где s — координата, отсчитываемая от левой неподвижной опоры вдоль деформированной оси стержня.

Внутренний изгибающий момент в изогнутом стержне определяется зависимостью

$$M = \frac{EJ}{\rho} = EJ \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (3.50)$$

где ρ — радиус кривизны деформированной оси стержня.

Выражения (3.49) и (3.50) позволяют подсчитать изменение полной потенциальной энергии стержня при переходе от прямолинейного положения равновесия к искривленному. Так, например, если стержень нагружен только сжимающей силой (рис. 3.26, а), то

$$\Delta \mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 - P (1 - \cos \vartheta) \right] ds. \quad (3.51)$$

Для стержня, находящегося под действием распределенной нагрузки типа собственного веса (рис. 3.26, б),

$$\Delta \mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ \frac{d\vartheta}{ds} - q(s) \int_0^s (1 - \cos \vartheta) ds \right] ds. \quad (3.52)$$

Аналогично можно составить выражение $\Delta \mathcal{E}$ для любого случая нагружения стержня, когда закритический изгиб происходит без растяжения оси стержня.

Условие стационарности $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ определяет равновесные состояния изогнутого стержня при конечных прогибах, а исследование знака второй вариации $\delta^2(\Delta \mathcal{E})$ позволяет установить, какие из равновесных состояний устойчивы.

Приведенные выше зависимости, описывающие закритическое деформирование стержней с нерастяжимой осью, являются точными (в рамках теории гибких упругих стержней).

Перейдем к построению приближенного решения методом Рэлея—Ритца. Полагаем, что решение линейной задачи (точное или приближенное) получено и, в частности, известна критическая нагрузка и соответствующая ему первая собственная функция задачи $\vartheta_1(s)$. Заметим, что при решении задач устойчивости в линейной постановке различие между координатами x и s исчезает и собственные функции $v_n(x)$ и $\vartheta_n(x)$ можно заменить на $v_n(s)$ и $\vartheta_n(s)$.

При малых, но конечных прогибах стержня естественно предположить, что в окрестности первой критической точки бифуркации форму изогнутой оси стержня можно аппроксимировать первой собственной функцией. Поэтому решение нелинейной задачи в первом приближении будем искать в виде:

$$\vartheta(s) = c_1 \vartheta_1(s), \quad (3.53)$$

где c_1 — коэффициент, зависящий от внешней нагрузки; $\vartheta_1(s)$ — первая собственная функция линейной задачи.

В приближенном решении, когда ограничиваемся исследованием малых отклонений стержня от прямолинейного положения равновесия, в выражении (3.49) $\cos \vartheta$ целесообразно разложить в ряд. Тогда получим

$$u(s) = - \int_0^s \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 - \frac{1}{4!} \vartheta^4 + \frac{1}{6!} \vartheta^6 - \dots \right) ds. \quad (3.54)$$

Подсчитывая с использованием (3.53) изменение полной потенциальной энергии стержня, приходим к простой алгебраической зависимости $\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}(c_1)$. Таким образом, используя метод Рэлея—Ритца, задачу исследования заkritического деформирования стержня можно свести к задаче исследования нелинейной системы с одной степенью свободы.

Так, например, для стержня, сжатого одной силой, выражение (3.51) с учетом разложения (3.54) и аппроксимации (3.53) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = & \frac{c_1^2}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} \right)^2 ds - \\ & - P \left(\frac{c_1^2}{2} \int_0^l \vartheta_1^2 ds - \frac{c_1^4}{4!} \int_0^l \vartheta_1^4 ds + \frac{c_1^6}{6!} \int_0^l \vartheta_1^6 ds - \dots \right). \end{aligned}$$

Условие стационарности $\Delta \mathcal{E}$ (в данном случае $\frac{d(\Delta \mathcal{E})}{dc_1} = 0$) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & c_1 \int_0^l EJ \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} \right)^2 ds - \\ & - P \left(c_1 \int_0^l \vartheta_1^2 ds - \frac{c_1^3}{3!} \int_0^l \vartheta_1^4 ds + \frac{c_1^5}{5!} \int_0^l \vartheta_1^6 ds - \dots \right) = 0. \end{aligned}$$

Поделив все слагаемые на $\int_0^l \vartheta_1^2 ds$ и учитывая, что ϑ_1 — первая собственная функция задачи и, следовательно,

$$\frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} \right)^2 ds}{\int_0^l \vartheta_1^2 ds} = P_{кр},$$

приходим к уравнению

$$c_1 [P_{кр} - P(1 - c_1^2 B_2 + c_1^4 B_4 - \dots)] = 0, \quad (3.55)$$

где

$$B_2 = \frac{1}{6} \frac{\int_0^l \vartheta_1^4 ds}{\int_0^l \vartheta_1^2 ds}; \quad B_4 = \frac{1}{120} \frac{\int_0^l \vartheta_1^6 ds}{\int_0^l \vartheta_1^2 ds} \dots \quad (3.56)$$

Из уравнения (3.55) следует, что при $P < P_{кр}$ возможна только одна прямолинейная форма равновесия стержня, соответствующая $c_1 = 0$. При $P > P_{кр}$ становится возможной и изгибная форма равновесия, описываемая (приближенно) зависимостью (3.53), причем связь между коэффициентом c_1 и силой P выражается уравнением

$$\frac{P}{P_{кр}} = \frac{1}{1 - c_1^2 (B_2 - c_1^2 B_4 + \dots)}. \quad (3.57)$$

Ограничившись в разложении (3.54) четвертыми степенями ϑ и приняв $P - P_{кр} = \Delta P \ll P_{кр}$, получим упрощенную формулу

$$c_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{B_2}} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{кр}}}. \quad (3.58)$$

Исследуя знак второй производной $\frac{d^2(\Delta \mathcal{E})}{dc_1^2}$, нетрудно установить, что изгибная форма равновесия стержня устойчива. Критическая точка бифуркации является точкой бифуркации первого типа (см. § 3). Результат проведенного исследования схематично изображен на рис. 3.27, а.

Аналогично приближенное решение может быть получено для стержня, находящегося под действием распределенной нагрузки $q(s) = P\bar{q}(s)$, где P — параметр нагрузки; $\bar{q}(s)$ — распределение нагрузки при $P = 1$. Снова воспользуемся аппроксимацией

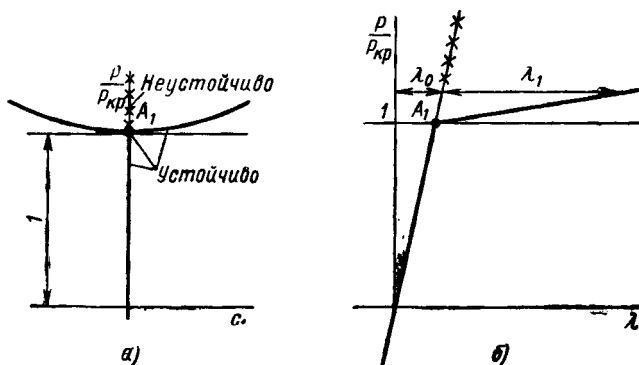


Рис. 3.27

(3.53) и получим упрощенную формулу для приближенного определения c_1 :

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{кр}}}, \quad (3.59)$$

где

$$B_2 = \frac{1}{6} \frac{\int_0^l \bar{q}(s) \int_0^s \vartheta_1^4 ds ds}{\int_0^l \bar{q}(s) \int_0^s \vartheta_1^2 ds ds}. \quad (3.60)$$

Анализ устойчивости прямолинейной и изгибной форм равновесия аналогичен предыдущему (рис. 3.27, а).

Необходимо подчеркнуть, что полученные формулы, а также представленный на рис. 3.27, а график справедливы для стержней переменной жесткости и при произвольных граничных условиях. При различных законах изменения изгибной жесткости $EJ = EJ(s)$ и разных граничных условиях изменяются критические нагрузки и вид собственных функций $\vartheta_1(s)$.

Зная как изменяется угол $\vartheta = \vartheta(s)$, легко найти поперечные прогибы стержня на ранней закритической стадии деформирования. При неподвижной левой опоре функция поперечного прогиба определяется выражением

$$v(s) = \int_0^s \sin \vartheta ds. \quad (3.61)$$

Раскладывая в ряд $\sin \vartheta$ и используя зависимость (3.53), приближенно находим

$$v(s) = c_1 \int_0^s \vartheta_1(s) ds. \quad (3.62)$$

В построенном приближенном решении функция поперечного прогиба остается подобной первой собственной функции линеаризованной задачи, а амплитуда прогиба растет пропорционально коэффициенту c_1 . Поэтому кривая на рис. 3.27, а, также характеризует темп роста поперечных прогибов стержня при $\frac{\Delta P}{P_{кр}} \ll 1$.

Полученный результат можно представить в других координатах. Вместо зависимости нагрузка — амплитуда поперечного прогиба можно построить, например, зависимость нагрузка — сближение торцов стержня λ . Сближение торцов λ складывается из укорочения стержня под действием сжимающей нагрузки и дополнительного сближения торцов, вызванного изгибом стержня.

Обозначим $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, где λ_0 и λ_1 — сближения торцов стержня соответственно за счет укорочения его оси и за счет изгиба. При известном распределении начальных усилий $N_0 = N_0(x)$ значение λ_0 определяется элементарно. Значение λ_1 можно найти с помощью зависимостей (3.53) и (3.54)

$$\lambda_1 = c_1^2 \int_0^l \left[\frac{1}{2} \vartheta_1^2(s) - \frac{c_1^2}{4!} \vartheta_1^4(s) + \dots \right] ds.$$

Ограничившись вторыми степенями разложения, получим

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^l \vartheta_1^2 ds}{2B_2} \left(\frac{\Delta P}{P_{кр}} \right). \quad (3.63)$$

Значение B_2 определяем в зависимости от вида нагрузки по формуле (3.56) или (3.60). Зависимость λ от сжимающей нагрузки показана на рис. 3.27, б.

Описанный метод решения может быть использован и в том случае, когда заданными являются не нагрузки, а сближения торцов стержня (например, при нагружении стержня в жесткой испытательной машине). Тогда расчет следует вести в обратном порядке: по λ определить P и затем подсчитать амплитуду поперечного перемещения. При этом все полученные выше расчетные зависимости справедливы. Аналогично можно вести расчет в тех случаях, когда задано не сближение торцов стержня, а повышение его температуры при неподвижно зафиксированных торцах.

Напряжения в стержне после потери устойчивости складываются из напряжений продольного сжатия и напряжений изгиба, причем, определив форму изогнутой оси стержня, нетрудно подсчитать напряжения изгиба. Окончательно получаем

$$\sigma = \frac{N_0}{F} \pm c_1 \frac{d\vartheta_1}{ds} \frac{EJ}{W}, \quad (3.64)$$

где W — момент сопротивления поперечного сечения стержня.

Схему расчета поясним на двух примерах. Рассмотрим вначале закритическое поведение шарнирно-опертого стержня постоянного поперечного сечения, сжатого одной силой P . Первая собственная функция линеаризованной задачи известна

$$\vartheta_1(s) = \cos \frac{\pi s}{l}.$$

По первой из формул (3.56) находим

$$B_2 = \frac{1}{6} \frac{\int_0^l \cos^4 \frac{\pi s}{l} ds}{\int_0^l \cos^2 \frac{\pi s}{l} ds} = \frac{1}{6} \frac{\frac{3}{8} l}{\frac{1}{2} l} = \frac{1}{8}.$$

Из выражения (3.62) получаем зависимость

$$\vartheta_{\max} = c_1 \int_0^{l/2} \vartheta_1 ds = \frac{\sqrt{8}}{\pi} l \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}}}.$$

При определении сближения торцов λ учитываем, что $\lambda_0 = \frac{Pl}{EF}$. По формуле (3.63) находим

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^l \cos^2 \frac{\pi s}{l} ds}{2B_2} \left(\frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}} \right) = \frac{l}{2} \frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}}.$$

Согласно выражению (3.64) получаем

$$\sigma = -\frac{P}{F} \pm c_1 \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi s}{l} \frac{EJ}{W}.$$

Очевидно, напряжения максимальны при $s = \frac{l}{2}$.

Считая $\frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}} \ll 1$, можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{P_{\text{кр}}}{F} \pm \frac{\sqrt{8}}{\pi} l \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{W} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}}} = \\ &= \sigma_{\text{кр}} \left(1 \pm \frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{lF}{W} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}}} \right), \end{aligned}$$

где $\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F}$.

Для квадратного поперечного сечения $W = \frac{a^3}{6}$, и формулу для определения $\sigma_{\max}$ можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{кр}} \left(1 \pm \frac{6\sqrt{8}}{\pi} \frac{l}{a} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{\text{кр}}}} \right).$$

Из этого выражения видно, что для тонких стержней малейшее превышение критической нагрузки приводит к появлению значительных напряжений изгиба. Так, при $l/a = 100$ превышение $P_{кр}$ на 1% вызывает напряжения изгиба превышающие более чем в 50 раз критические напряжения равномерного стержня при $P = P_{кр}$.

Рассмотрим закритическое поведение изображенного на рис. 3.28 стержня, теряющего устойчивость под действием собственного веса. Критическая нагрузка для такого стержня равна $(ql)_{кр} = 7,834 \frac{EJ}{l^2}$, причем форма изогнутой оси



Рис. 3.28

стержня при потере устойчивости описывается функциями Бесселя (см. § 13). Но для построения приближенного решения эти функции не удобны. Закритические перемещения и напряжения можно оценить, используя для описания формы изогнутой оси стержня более простые функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи. Например, в данном случае (см. § 13).

$$\vartheta(s) = c_1 \left[\frac{s}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{l} \right)^2 \right],$$

где s — координата, отсчитываемая от заделки.

Заметим, что учитывая приближенный характер всего решения, функцию $\vartheta(s)$ можно представить в еще более простом виде. Например, в рассматриваемой задаче, ограничившись удовлетворением только геометрического граничного условия $\vartheta(0) = 0$, примем

$$\vartheta(s) = c_1 \left(\frac{s}{l} \right).$$

Тогда получим

$$B_2 = \frac{\frac{1}{6} \int_0^l \int_0^s \left(\frac{s}{l} \right)^4 ds ds}{\int_0^l \int_0^s \left(\frac{s}{l} \right)^2 ds ds} = \frac{1}{15}; \quad c_1 = \sqrt{15} \sqrt{\frac{\Delta q}{q_{кр}}}.$$

Максимальный прогиб при $s = l$ приближенно определяется по формуле

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{\frac{\Delta q}{q_{кр}}}.$$

Для максимального момента $M(0)$ непосредственно из условия равновесия получим приближенную формулу

$$M(0) = qc_1 \int_0^l \int_0^s \left(\frac{s}{l} \right) ds = \frac{5}{2} ql^2 \sqrt{\frac{\Delta q}{q_{кр}}}.$$

Нетрудно проверить, что при упрощении вида аппроксимирующей функции окончательные результаты изменяются незначительно.

Если закрепления концов стержня в продольном направлении исключают возможность потери устойчивости без растяжения его оси (см. § 14), то приведенная выше схема решения не применима, поскольку она основана на предположении о нерастяжимости оси стержня. В этом случае при подсчете полной потенциальной энергии стержня в изогнутом состоянии $\mathfrak{A}_1$ необходимо учитывать энергию растяжения

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EF (\varepsilon_0 + \varepsilon_2)^2 dx - \int_0^l q (u_0 + u_2) dx,$$

где u_0 , ε_0 — начальные осевые перемещения и удлинения; u_2 , ε_2 — дополнительные осевые перемещения и удлинения, причем

$$\varepsilon_2 = u_2' + \frac{1}{2} v'^2.$$

Наиболее простое приближенное решение можно получить, если воспользоваться следующими допущениями: 1) первая собственная функция $v_1(x)$ линейной задачи с точностью до масштаба описывает закритические прогибы стержня; 2) осевые дополнительные перемещения $u_2(x)$ связаны с поперечными прогибами зависимостью (3.20). Тогда изменение полной потенциальной энергии стержня при переходе в новое отклоненное состояние равновесия равно

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0 = & \frac{c_1^2}{2} \int_0^l EJ (\tilde{v}_1'(x))^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l EF \varepsilon_2^2 dx - \int_0^l q u_2(x) dx, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где c_1 — коэффициент, зависящий от уровня нагружения; $v_1(x)$ — первая собственная функция линейной задачи, причем, когда $u_2(l) = 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \frac{c_1^2}{2} \frac{1}{EF(x)} \frac{\int_0^l (\tilde{v}_1'(x))^2 dx}{\int_0^l \frac{dx}{EF(x)}}; \\ u_2 = & c_1^2 \frac{\int_0^l (\tilde{v}_1'(x))^2 dx}{2} \left[\frac{\int_0^x \frac{dx}{EF(x)}}{\int_0^l \frac{dx}{EF(x)}} - \frac{\int_0^x (\tilde{v}_1'(x))^2 dx}{\int_0^l (\tilde{v}_1'(x))^2 dx} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, задача о закритических деформациях стержней опять сведена к нелинейной задаче деформации системы с одной степенью свободы. Если считать, что внешние нагрузки возрастают пропорционально одному параметру P , то зависимости между параметром c_1 и параметром нагрузки P устанавливаются из условия $\delta(\Delta\vartheta) = 0$, в данном случае из условия $\frac{d(\Delta\vartheta)}{dc_1} = 0$. Эта зависимость будет иметь такую структуру:

$$c_1 = K \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{кр}}},$$

где K — коэффициент, зависящий от EF , т. е. от жесткости стержня на растяжение.

Характер критической точки бифуркации такой же, как и в случае потери устойчивости оси стержня без растяжения. Но качественно закритическое поведение стержня иное: после потери устойчивости поперечные прогибы растут не так быстро, как при потере устойчивости стержня без растяжения оси.

§ 18. Влияние начальных неправильностей на поведение сжатых стержней

Рассмотренные задачи устойчивости стержней базировались на допущениях, что ось стержня до нагружения — идеально прямая и все внешние силы и реакции опор действуют строго вдоль оси. Именно в силу этих допущений при любом уровне нагрузок была возможна прямолинейная форма равновесия стержня с тождественно равным нулю поперечным прогибом. И именно эти допущения приводят к существованию критической нагрузки, т. е. такой нагрузки, при превышении которой исходная прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой. Но ось реального стержня не является идеально прямой и до нагружения имеются не равные нулю начальные поперечные прогибы. Рассмотрим стержень с не равными нулю начальными прогибами и выясним, как эти начальные прогибы влияют на поведение стержня при продольном нагружении.

Критическая точка бифуркации исходной формы равновесия идеально прямого стержня является точкой бифуркации первого типа (см. § 3) и изгибная форма равновесия в окрестности критической точки бифуркации устойчива. В тех случаях, когда идеально правильная система имеет критическую точку бифуркации первого типа, влияние начальных неправильностей можно оценить с помощью линеаризованных неоднородных уравнений.

Общую схему решения покажем на простом примере. Рассмотрим шарнирно-опертый стержень, сжатый силой P (рис. 3.29). До нагружения начальный прогиб стержня равен $v_0 = v_0(x)$; дополнительный прогиб, появляющийся в результате продольного нагружения, обозначим $v = v(x)$. Тогда полный прогиб ра-

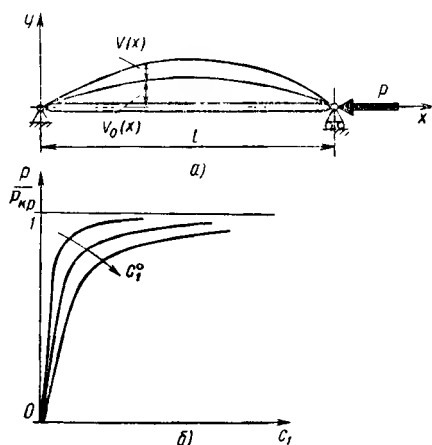


Рис. 3.29

связано с дополнительным изгибом стержня. Во второе слагаемое входит полный прогиб: плечо внешней силы P определяется полным прогибом $v_n(x)$.

Считая начальный прогиб $v_0(x)$ известным, уравнение (3.66) запишем в таком виде:

$$EJv'' + Pv = -Pv_0. \quad (3.67)$$

Граничные условия задачи: 1) $v(0) = 0$; 2) $v(l) = 0$.

Решение уравнения (3.67) можно получить различными способами, но в рассматриваемой задаче удобнее воспользоваться методом разложения по собственным функциям. Собственные функции однородной задачи известны:

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Решение неоднородного уравнения (3.67) будем искать в виде разложения по этим собственным функциям:

$$v(x) = \sum c_n v_n(x) = \sum c_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.68)$$

Правую часть уравнения представим в виде ряда по той же системе собственных функций:

$$v_0(x) = \sum c_n^0 v_n(x) = \sum c_n^0 \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.69)$$

Подставив выражения (3.68) и (3.69) в уравнение (3.67) и приравняв коэффициенты при каждой из синусов в левой и правой частях равенства, получим цепочку независимых алгебраических уравнений

$$(-P_n + P)c_n = -Pc_n^0,$$

вен $v_n(x) = v_0(x) + v(x)$. Примем, что полные прогибы являются величинами малыми по сравнению с длиной стержня, а осевое усилие $N = -P$ не зависит от поперечных прогибов стержня. Приравнявая момент от внешней силы P внутреннему изгибающему моменту (см. § 4) и удерживая только первые степени поперечных прогибов, запишем

$$EJv'' + Pv_n = 0. \quad (3.66)$$

В первое слагаемое входит дополнительный прогиб v , поскольку возникновение внутреннего изгибающего момента

где

$$P_n = \frac{(n\pi)^2 EJ}{l^2},$$

откуда находим

$$c_n = \frac{c_n^0 P}{P_n - P} = \frac{c_n^0}{\frac{P_n}{P} - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.70)$$

Следовательно,

$$v(x) = \sum \frac{c_n^0}{\frac{P_n}{P} - 1} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.71)$$

Полный прогиб равен

$$v_n(x) = v_0(x) + v(x) = \sum \frac{c_n^0}{1 - \frac{P}{P_n}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.72)$$

Как видим из формул (3.70), при $P \rightarrow P_n$ амплитуда соответствующей гармоники $c_n \rightarrow \infty$. Но при сжатии стержня может быть реализована нагрузка $P < \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_{кр}$. Следовательно, в этом диапазоне значений нагрузки может резко расти только амплитуда первой гармоники. Независимо от соотношения между начальными амплитудами c_n^0 при приближении нагрузки к $P_{кр}$ доминирующей окажется первая гармоника. Поэтому в приближенном решении обычно ограничиваются учетом первой гармоники и принимают

$$v(x) \approx \frac{c_1^0}{\frac{P_{кр}}{P} - 1} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad (3.73)$$

$$v_n(x) \approx \frac{c_1^0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.74)$$

Зависимость $v_{\max} = c_1$ от нагрузки показана на рис. 3.29, б.

Определив поперечные прогибы, нетрудно найти максимальные напряжения изгиба в стержне

$$\sigma_{изг} = \pm \frac{M_{\max}}{W},$$

где $M_{\max}$ — максимальный изгибающий момент; W — момент сопротивления сечения стержня.

В данном случае

$$M_{\max} = P(v_n)_{\max} \approx P \frac{c_1^0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}.$$

Полное напряжение

$$\sigma = -\frac{P}{F} \pm \sigma_{\text{изг}} = -\frac{P}{F} \left(1 \mp \frac{Fc_1^0}{W} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}} \right), \quad (3.75)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня.

Например, для стержня прямоугольного поперечного сечения, ширина и высота которого соответственно равны b и h , получим

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 \mp 6 \frac{c_1^0}{h} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}} \right).$$

Как видно из этой формулы, изгибная составляющая напряжения определяется отношением амплитуды начального прогиба к размерам сечения. Если, например, $\frac{c_1^0}{h} = 0,05$, то при $\frac{P}{P_{\text{кр}}} = 0,7$ максимальные напряжения изгиба равны напряжениям осевого сжатия.

Приведенное решение можно использовать и в случае произвольно нагруженного стержня при произвольных граничных условиях.

Рассмотрим произвольно нагруженный в осевом направлении стержень (рис. 3.30, а), имеющий начальные неуровни $v_0 = v_0(x)$. Пусть при $v_0(x) \equiv 0$ потеря устойчивости стержня описывается линеаризованным однородным уравнением

$$(EJv'')'' - P(\bar{N}_0 v')' = 0. \quad (3.76)$$

При заданных граничных условиях собственные функции этого уравнения $v_n(x)$ и собственные значения параметра нагрузки P_n считаем известными, причем (см. приложение I)

$$P_n = \frac{\int_0^l v_n (EJv_n'')'' dx}{\int_0^l v_n (\bar{N}_0 v_n')' dx}. \quad (3.77)$$

Условие равновесия в проекции на ось y элемента стержня с начальными неуровнями (рис. 3.30, б) приводит к уравнению

$$Q' - P(\bar{N}_0 v_n')' = 0, \quad (3.78)$$

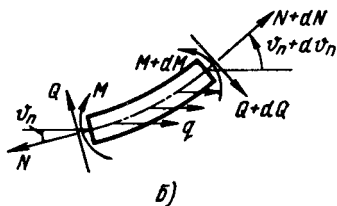
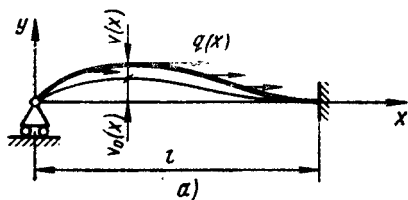


Рис. 3.30

где $\vartheta_n = \vartheta_0(x) + v'(x)$ — полный угол поворота касательной к оси стержня, который считаем величиной конечной, но малой. Как и при выводе уравнения (3.4), $Q = M'$. Внутренний изгибающий момент M возникает в результате дополнительных прогибов $v(x)$, поэтому $M = EJv''(x)$. Тогда уравнение (3.78) принимает вид

$$(EJv'')'' - P[\bar{N}(v_0' + v')] = 0, \quad (3.79)$$

где $v = v(x)$ — малые но конечные дополнительные прогибы.

Если задача продольного нагружения стержня статически неопределима, то необходимо учитывать взаимное влияние $N(x)$ и $v(x)$. Но если задача продольного нагружения стержня статически определима, то можно считать, что $N_0 = PN_0(x)$ не зависят от поперечных перемещений. Тогда поведение стержня с начальными неправильностями будет описываться неоднородным линейаризованным уравнением

$$(EJv'')'' - P(\bar{N}_0 v')' = P(\bar{N}_0 v_0')', \quad (3.80)$$

где $\bar{N}_0 = \bar{N}_0(x)$ — распределение внутренних усилий в стержне без начальных неправильностей при $P = 1$.

Исследуем подробнее этот наиболее интересный в практическом отношении случай, когда поведение стержня с начальными неправильностями может быть описано уравнением (3.80). Решение этого уравнения будем строить в виде разложения по собственным функциям однородного уравнения (3.76):

$$v(x) = \sum c_n v_n(x).$$

Представим начальные неправильности тоже в виде разложения

$$v_0(x) = \sum c_n^0 v_n(x).$$

Подставив эти разложения в уравнение (3.80), получим

$$\sum c_n (EJv_n'')'' - P \sum c_n (\bar{N}_0 v_n')' = P \sum c_n^0 (\bar{N}_0 v_n')'.$$

Умножим обе части этого уравнения на собственные функции $v_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем произведения от 0 до l . В силу свойства обобщенной ортогональности (см. приложение I)

$$\int_0^l v_n (EJv_k'')'' dx = 0;$$

$$\int_0^l v_n (\bar{N}_0 v_k')' dx = 0.$$

Следовательно,

$$c_n \int_0^l v_n (EJ v_n'')' dx - P c_n \int_0^l v_n (\bar{N}_0 v_n')' dx = P c_n^0 \int_0^l v_n (\bar{N}_0 v_n')' dx;$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Поделим все слагаемые на $\int_0^l v_n (\bar{N}_0 v_n')' dx$. С учетом выражения (3.77) получим цепочку независимых уравнений для определения коэффициентов c_n :

$$c_n = \frac{c_n^0}{\frac{P_n}{P} - 1}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда

$$v(x) = \sum \frac{c_n^0}{\frac{P_n}{P} - 1} v_n(x); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Как в приведенном выше примере, приближенно можно принять

$$v(x) \approx \frac{c_1^0}{\frac{P_{кр}}{P} - 1} v_{кр}(x), \quad (3.81)$$

где $v_{кр}(x) = v_1(x)$ — первая собственная функция однородной задачи, описывающая форму изогнутой оси идеально правильного стержня при потере устойчивости.

В приведенном решении предполагалось, что начальные не-правильности оси стержня известны. В этом случае, раскладывая функцию начального прогиба $v_0(x)$ в ряд по собственным функ-

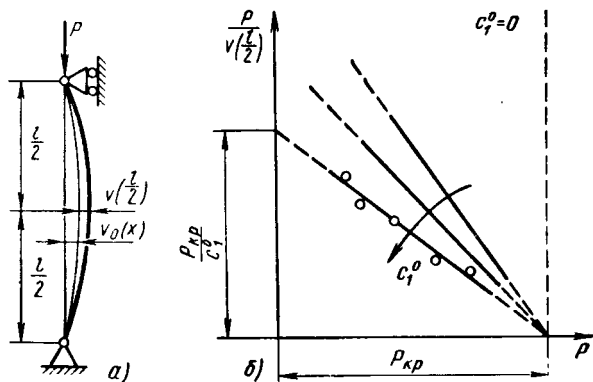


Рис. 3.31

циям $v_n(x)$, можно найти c_n^0 и непосредственно воспользоваться полученным результатом.

Это обстоятельство снижает практическую ценность приведенного решения, ибо детальное измерение начальной формы оси стержня — операция трудновыполнимая. Однако структура формул (3.73) и (3.81) позволяет резко упростить и сократить необходимое число измерений при испытании реальных стержней на осевое сжатие. Так, например, формулу (3.73) для шарнирно-опертого стержня можно переписать в виде

$$\frac{P}{v\left(\frac{l}{2}\right)} = -\frac{P}{c_1^0} + \frac{P_{кр}}{c_1^0}, \quad (3.82)$$

где $v\left(\frac{l}{2}\right)$ — дополнительный прогиб в среднем сечении стержня (рис. 3.31, а). Таким образом, между $\frac{P}{v\left(\frac{l}{2}\right)}$ и P существует линей-

ная зависимость. Измерив при нескольких значениях P дополнительный прогиб в среднем сечении стержня $v\left(\frac{l}{2}\right)$, можно экспериментально построить линейную зависимость, как показано на рис. 3.31, б. Такой прием обработки экспериментальных данных предложен Саусвеллом и называется методом Саусвелла. С помощью этого приема на реальных стержнях можно экспериментально определить значение $P_{кр}$, не производя их предварительного обмера. Для этого, проведя по нескольким экспериментально полученным точкам прямую, находят ее пересечение с осью абсцисс. Прием Саусвелла позволяет по нескольким замерам находить амплитуду начальной неправильности c_1^0 . Для этого достаточно найти точку пересечения построенной прямой с осью ординат. Наконец, прием Саусвелла дает возможность проводить неразрушающие испытания стержней на осевое сжатие, ибо, определив по начальному этапу нагружения $P_{кр}$ и c_1^0 , можно аналитически прогнозировать дальнейшее поведение стержня под нагрузкой (включая возможное развитие пластических деформаций).

**БИБЛИОТЕКА
КОЛОХВА
ОСКОРЖА**

ИНБ № 33
НЕ БОЛЕЕ 11 КНИГ И В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

Устойчивость пластин

В главе дана постановка задачи устойчивости тонкой упругой пластины, приведен подробный вывод основного линеаризованного уравнения теории устойчивости пластин и пояснены некоторые варианты однородных граничных условий этого уравнения. Рассмотрены точные аналитические решения основного уравнения для прямоугольных и круглых пластин и приближенное интегрирование этого уравнения методом Галеркина. Эти классические решения задач устойчивости пластин получены в конце XIX — начале XX в., однако они не утратили практического значения. Их результаты широко используются в инженерных расчетах и служат эталоном для отработки и апробирования всех современных приближенных методов расчета пластин на устойчивость.

§ 19. Постановка задачи; исходные зависимости

Представим пластину в прямоугольной системе координат так, чтобы ее срединная плоскость совпадала с координатной плоскостью xu (рис. 4.1, а). Примем, что толщина пластины h существенно меньше других размеров пластины в плоскости xu . Поперечные перемещения точек срединной плоскости пластины обозначим w , перемещения по направлениям осей x , y — соответственно u , v . Пластина нагружена в своей плоскости поверхностными и контурными усилиями p_x , p_y и q_x , q_y , поперечные нагрузки отсутствуют (рис. 4.1, б).

Задачу устойчивости такой пластины рассмотрим при следующих допущениях.

1. До нагружения пластина идеально плоская и в докритическом состоянии равнодействующие всех внешних нагрузок и реакций опор действуют строго в срединной плоскости пластины.

2. Докритическое напряженное состояние описывается соотношениями линейной теории упругости и изменением размеров пластины до потери устойчивости пренебрегаем.

3. Все действующие на пластину внешние нагрузки мертвые, т. е. они не изменяются ни по величине, ни по направлению при деформациях пластины.

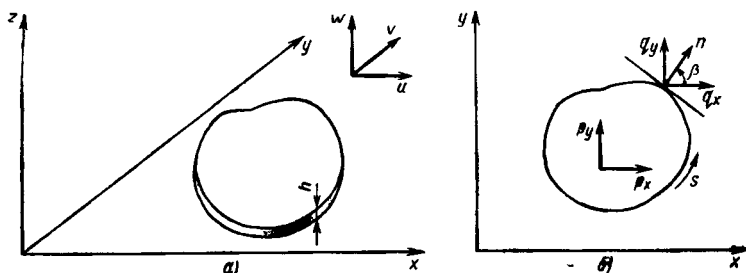


Рис. 4.1

4. Изгиб пластины описывается с помощью обычных гипотез линейной теории изгиба тонких жестких пластин, т. е. гипотезы о неискривляемости нормали и гипотезы о малости нормальных напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости.

В силу первого допущения всегда возможно плоское состояние равновесия пластины, при котором $w(x, y) \equiv 0$. Это неискривленное плоское состояние равновесия будем считать начальным и все относящиеся к нему величины обозначать индексом «0», например, u_0 , v_0 и т. д.

Согласно второму допущению в начальном состоянии удлинения и углы сдвига в срединной плоскости связаны с производными перемещений u_0 и v_0 линейными зависимостями (рис. 4.2, а)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}; \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

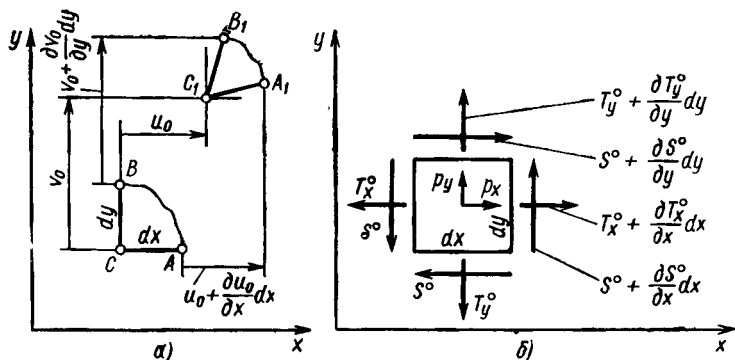


Рис. 4.2

Уравнения равновесия элемента пластины в начальном неискривленном состоянии имеют вид (рис. 4.2, б)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} + p_x &= 0; \\ \frac{\partial S^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{\partial y} + p_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Входящие в эти уравнения начальные внутренние усилия в срединной плоскости T_x^0 , T_y^0 , S^0 и удлинения и углы сдвига связаны зависимостями закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{Eh} (T_x^0 - \mu T_y^0); \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{Eh} (T_y^0 - \mu T_x^0); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} S^0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

или

$$\begin{aligned} T_x^0 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^0 + \mu \varepsilon_y^0); \quad T_y^0 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^0 + \mu \varepsilon_x^0); \\ S^0 &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

При заданных граничных условиях на контуре пластины по приведенным зависимостям можно определить напряжения и деформации в начальном неискривленном состоянии. На части контура, на которой действуют внешние нагрузки, граничные условия имеют вид (рис. 4.1, б)

$$\begin{aligned} T_x^0 \cos \beta + S^0 \sin \beta &= q_x; \\ S^0 \cos \beta + T_y^0 \sin \beta &= q_y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На другой части контура могут быть заданы геометрические граничные условия

$$\begin{aligned} u_0 &= \tilde{u}_0; \\ v_0 &= \tilde{v}_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В общем случае, когда точки контура пластины упруго закреплены относительно смещений в ее плоскости, граничные условия формулируются так же, как для упругозакрепленного в продольном направлении торца стержня (см. § 14).

Если внешние нагрузки p_x и p_y не зависят от координат, то можно ввести функцию начальных усилий Φ^0 с помощью соотношений

$$\frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial y^2} = T_x^0; \quad \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial x^2} = T_y^0; \quad \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial x \partial y} = -S^0 - y p_x - x p_y. \quad (4.6)$$

Тогда определение исходного напряженно-деформированного состояния пластины сведется к решению бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi^0 = 0, \quad (4.7)$$

где

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2 (*)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (*)}{\partial y^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

Следует отметить, что при сложных очертаниях контура пластины и при сложных нагрузках (например, при сосредоточенных контурных нагрузках) определение начального напряженного состояния пластины представляет трудную задачу. Но предположим, что она решена (точно или приближенно) и распределение внутренних усилий в пластине при начальном неискривленном состоянии равновесия известно.

Заметим, что задачу устойчивости пластин в рассматриваемой постановке, когда начальное напряженно-деформированное состояние описывается уравнениями линейной теории упругости, можно решать, не определяя этого состояния (см. § 10).

В дальнейшем примем, что все внешние нагрузки изменяются пропорционально параметру P . Поскольку докритическое напряженно-деформированное состояние описывается линейными уравнениями, можно записать

$$T_x^0 = P \bar{T}_x^0; \quad T_y^0 = P \bar{T}_y^0; \quad S^0 = P \bar{S}^0; \quad \varphi^0 = P \bar{\varphi}^0, \quad (4.8)$$

где $\bar{T}_x^0 = \bar{T}_x^0(x, y)$, $\bar{T}_y^0 = \bar{T}_y^0(x, y)$, $\bar{S}^0 = \bar{S}^0(x, y)$, $\bar{\varphi}^0 = \bar{\varphi}^0(x, y)$ — функции, соответствующие распределению внутренних начальных усилий при $P = 1$.

При достаточно малых значениях параметра нагрузки P начальное неискривленное состояние равновесия пластины будет единственным и устойчивым. С ростом значений параметра P у пластины, как и у прямого стержня (см. гл. 3), могут появляться изгибные состояния равновесия, смежные с начальным неискривленным состоянием. Те значения параметра нагрузки P_n , при которых наряду с начальным неискривленным состоянием существуют новые изгибные состояния равновесия пластины, определяют точки бифуркации начального состояния равновесия. Наименьшее из значений параметра P_n будет критическим, т. е. при его превышении начальное неискривленное состояние перестает быть устойчивым (см. § 5).

Для определения точек бифуркации начального неискривленного состояния пластины следует рассмотреть искривленное изгибное состояние равновесия пластины, бесконечно близкое к исходному. Такое изгибное состояние равновесия пластины будем описывать функцией поперечного прогиба точек ее срединной поверхности

$$w = \alpha w_1(x, y), \quad (4.9)$$

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат; $w_1(x, y)$ — некоторая конечная функция координат.

При изгибе пластины нормаль к ее срединной плоскости поворачивается в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xz и yz , соответственно на углы ϑ_x и ϑ_y ; эти углы с точностью до величин высшего порядка малости относительно параметра α связаны с поперечным прогибом соотношениями (см. § 8)

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.10)$$

Изменения углов ϑ_x и ϑ_y вдоль координатных линий x и y определяют кривизны деформированной срединной плоскости в сечениях, параллельных координатным плоскостям xz и yz :

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \kappa_y &= \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Изменение угла ϑ_x вдоль координаты y (равное, очевидно, изменению угла ϑ_y вдоль координаты x) дает значение крутки деформированной срединной плоскости

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.12)$$

Гауссова кривизна поверхности равна $K = \frac{1}{R_1 R_2}$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в рассматриваемой точке. С точностью до величины высшего порядка малости относительно параметра α гауссова кривизна деформированной срединной плоскости определяется выражением [19]

$$K = \kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (4.13)$$

Напомним, что при чисто изгибных деформациях поверхности гауссова кривизна остается неизменной; в частности, при чисто изгибных деформациях срединной плоскости пластины ее гауссова кривизна остается тождественно равной нулю.

При изгибе пластины в ней возникают внутренние изгибающие моменты M_x , M_y , скручивающий момент M_{xy} и внутренние поперечные силы Q_x , Q_y (рис. 4.3). В соответствии с четвертым допущением внутренние моменты выражаются через поперечный прогиб с помощью формул [12]:

$$\begin{aligned} M_x &= D(\kappa_x + \mu \kappa_y) = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= D(\kappa_y + \mu \kappa_x) = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= (1 - \mu) D \kappa_{xy} = (1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

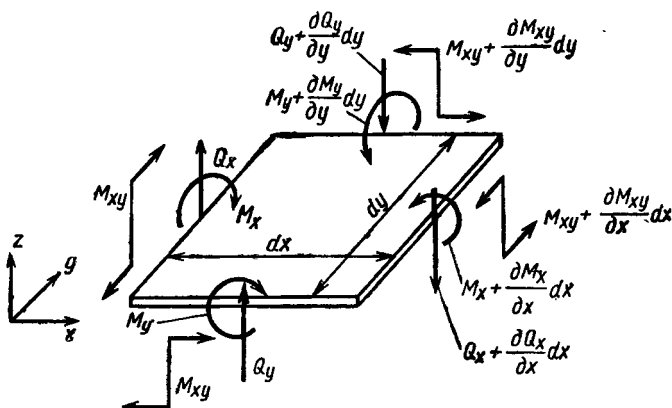


Рис. 4.3

Здесь использовано обозначение цилиндрической жесткости

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (4.15)$$

В линейной теории поперечного изгиба пластин уравнения равновесия формулируются для недеформированного состояния. Условия равновесия элемента пластины в недеформированном состоянии — уравнения моментов относительно его граней — приводят к двум зависимостям

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Если на пластину действует нормальная распределенная нагрузка $p_z = p_z(x, y)$, то независимо от усилий в срединной плоскости пластины условие равновесия элемента пластины — проекция на ось z всех приложенных к элементу пластины сил — приводит к уравнению

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - p_z(x, y) = 0. \quad (4.17)$$

Используя зависимость (4.16), получаем основное уравнение линейной теории поперечного изгиба пластин. Для пластины постоянной толщины это уравнение имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - p_z(x, y) = D \nabla^2 \nabla^2 w - p_z(x, y) = 0. \quad (4.18)$$

Не останавливаясь на формулировке граничных условий для этого уравнения, отметим, что силовые граничные условия выте-

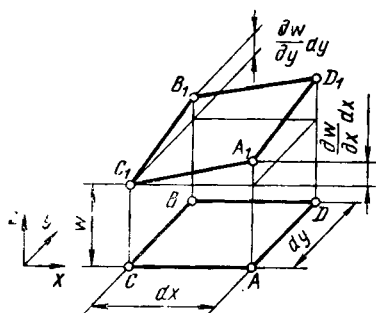


Рис. 4.4

го состояния равновесия пластины и определить изгибные формы равновесия пластины в окрестностях точек бифуркации. Но этих зависимостей недостаточно для того, чтобы исследовать поведение пластины в закритической области при конечных поперечных прогибах. Недостаточно их и для исследования устойчивости пластин энергетическим методом. Для этих целей кроме приведенных линейных зависимостей необходимо использовать геометрически нелинейные соотношения теории гибких пластин. Выведем эти соотношения.

На рис. 4.4 изображено положение элемента срединной плоскости пластины до и после деформации (точки $CADB$ переходят в положение $C_1A_1D_1B_1$); перемещения u, v в плоскости пластины пока не учитываем, ограничиваясь рассмотрением деформаций срединной плоскости, непосредственно связанных с поперечным прогибом w .

Векторы $\vec{C_1A_1}$ и $\vec{C_1B_1}$ обозначим соответственно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, их проекции на оси координат равны

Вектор	x	y	z
$\mathbf{a}$	dx	0	$\frac{dw}{dx} dx$
$\mathbf{b}$	0	dy	$\frac{dw}{dy} dy$

Модули этих векторов

$$C_1A_1 = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2};$$

$$C_1B_1 = |\mathbf{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}.$$

кают из уравнений равновесия прилегающего к контуру бесконечного малого элемента пластины, причем уравнения равновесия записываются для недеформированного состояния [12].

Приведенные выше зависимости относятся к линейной теории изгиба пластин. Как показано в следующем параграфе, используя эти зависимости, можно получить линейаризованное уравнение, дающее возможность найти точки бифуркации начального неискривленно-

По определению относительные удлинения в направлениях осей x и y равны

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{C_1 A_1 - CA}{CA} = \frac{dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - dx}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1; \\ \varepsilon_y &= \frac{C_1 B_1 - CB}{CB} = \frac{dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - dy}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Ограничившись квадратичными членами разложения, получим значения удлинений, связанных с поперечным прогибом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots\right] - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ \varepsilon_y &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \dots\right] - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Определим углы сдвига срединной плоскости, связанные с прогибом w . Прямой угол между отрезками CA и CB при изгибе пластины искажается; его новое значение, равное углу между отрезками $C_1 A_1$ и $C_1 B_1$, обозначим $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, где γ — угол сдвига, связанный с поперечным прогибом w . Скалярное произведение векторов a и b равно произведению модулей этих векторов и косинуса угла между ними:

$$\begin{aligned}a \cdot b &= |a| \cdot |b| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \\ &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \sin \gamma = \\ &= dx dy \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots\right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \dots\right] [\gamma + \dots].\end{aligned}\quad (4.21)$$

Скалярное произведение можно подсчитать по формуле

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \frac{\partial w}{\partial x} dx \frac{\partial w}{\partial y} dy. \quad (4.22)$$

Сравнивая выражения (4.22) и (4.21) и ограничиваясь квадратичными членами, получаем

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.23)$$

Итак, видим, что связанные с поперечным прогибом удлинения и сдвиги срединной плоскости пластины имеют второй порядок малости, поэтому в линейных задачах изгиба пластин ими пренебрегают.

Если кроме поперечных прогибов w учесть перемещения u , v в плоскости пластины, то деформации срединной плоскости, вызываемые этими перемещениями, можно подсчитать по линейным

зависимостям (4.1), поскольку при изгибе тонких пластин можно считать $|\omega| \gg |u|, |v|$. Окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Остановимся на условии нерастяжимости срединной плоскости пластины. Это условие, естественное и законное для линейных задач изгиба пластин, иногда используют в нелинейных задачах, например при выводе энергетического условия устойчивости пластин [37]. Перемещения u и v часто выражают через поперечный прогиб ω из условия равенства нулю значений ε_x , ε_y , γ , определяемых формулами (4.24), т. е. из условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2; \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Однако для определения двух функций u и v условие (4.25) дает систему трех уравнений. Поэтому перемещения u и v из этой системы можно определять только при выполнении некоторого дополнительного условия, которое можно получить, исключая u и v из системы (4.25). Дифференцируя 2 раза первое уравнение системы (4.25) по y , второе — 2 раза по x и третье — по x и y , а затем вычитая два первых результата из последнего, получаем

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 = K = 0. \quad (4.26)$$

Отсюда следует, что для определения перемещений u и v условием нерастяжимости можно пользоваться только в том случае, когда гауссова кривизна деформированной срединной плоскости пластины остается тождественно равной нулю, т. е. когда пластина изгибается по так называемой развертывающейся поверхности. Например, чисто изгибные деформации, при которых $K = 0$, возможны для пластины со свободным контуром (лист бумаги можно свернуть в конус). Но еще раз подчеркнем, что в общем случае деформирования пластины условием нерастяжимости срединной плоскости для определения перемещений u и v пользоваться нельзя.

§ 20. Основное линеаризованное уравнение

Для вывода основного линеаризованного уравнения рассмотрим элемент пластины в состоянии, отклоненном от начального

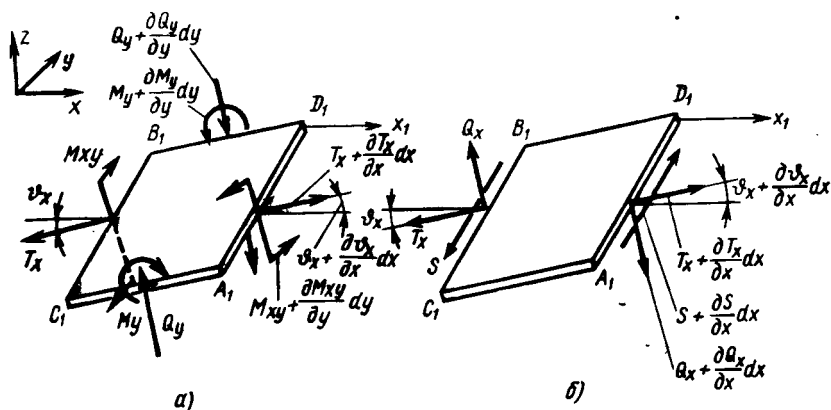


Рис. 4.5

(рис. 4.5). Поперечные прогибы w , переводящие пластину из начального состояния в новое отклоненное состояние равновесия, считаем бесконечно малыми:

$$w = \alpha w_1(x, y),$$

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат.

Во всех уравнениях будем сохранять только слагаемые первого порядка малости относительно параметра α (см. гл. 1). Все этапы вывода линеаризованного уравнения для пластины аналогичны соответствующим этапам вывода линеаризованного уравнения для стержня (см. § 13). Некоторые усложнения, связанные с двумерностью задачи, носят не принципиальный, а чисто технический характер.

В соответствии с четвертым допущением, внутренние моменты, возникающие в пластине при ее отклонении от начального состояния равновесия, выражаются зависимостями (4.14)

$$M_x = \alpha D_2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right); \quad M_y = \alpha D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = \alpha (1 - \mu) D \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}.$$

Очевидно, эти моменты имеют тот же первый порядок малости, что и поперечный прогиб $\alpha w_1(x, y)$.

Приравняем нулю сумму моментов относительно оси x_1 , проходящей через точку D_1 параллельно оси x (на рис. 4.5 остальные усилия не изображены). Отбросив слагаемые высших порядков малости, получим

$$Q_y dx dy + M_y dx + M_{xy} dy - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - \\ - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy = \left(Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dx dy = 0. \quad (4.27)$$

Как нетрудно убедиться, остальные усилия дают моменты высших порядков малости относительно оси x_1 , например от усилия T_x результирующий момент равен (рис. 4.5, б)

$$\begin{aligned} \left[-T_x dy \vartheta_x + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\vartheta_x + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} dx \right) \right] \frac{dy}{2} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (T_x \vartheta_x) dx \frac{(dy)^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Сравнивая выражения (4.27) и (4.28), видим, что момент от усилия T_x , действительно, имеет высший порядок малости по сравнению с моментами от Q_y , M_y и M_{xy} . Аналогично можно оценить порядок моментов и от остальных силовых факторов, причем следует подчеркнуть, что высший порядок малости слагаемых, отброшенных в выражении (4.27), не связан с линейризацией и со значениями поперечных прогибов пластины w , а является следствием бесконечно малых размеров рассматриваемого элемента.

Те же рассуждения справедливы для суммы моментов относительно оси, параллельной оси y . Таким образом, для отклоненного элемента остаются в силе зависимости (4.16). Следовательно, поперечные силы Q_x , Q_y , как и моменты M_x , M_y , M_{xy} , имеют первый порядок малости относительно параметра α .

Приравняем нулю сумму проекций всех сил на оси x и y (рис. 4.5, б). Учитывая повороты граней элемента $CADB$ и отбрасывая величины заведомо высших порядков малости, получаем уравнения (на рис. 4.5 усилия p_x и p_y не приведены)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + p_x + \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_x \vartheta_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y \vartheta_x) \right] &= 0; \\ \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + p_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_x \vartheta_y) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y \vartheta_y) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Слагаемые в квадратных скобках имеют второй порядок малости, так как они содержат произведения величин первого порядка малости Q и ϑ , поэтому их тоже следует отбросить. В результате получим уравнения равновесия элемента в отклоненном состоянии, которые не отличаются от уравнений равновесия элемента в начальном состоянии (4.2). Следовательно, T_x , T_y , S остаются равными начальным усилиям T_x^0 , T_y^0 , S^0 (с точностью до величин второго порядка малости).

Приравняем нулю сумму проекций всех сил на ось z (рис. 4.5, б). При этом учтем повороты граней рассматриваемого элемента. Грань C_1B_1 повернута вокруг оси y на угол ϑ_x , а грань A_1D_1 — на угол $\left(\vartheta_x + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} dx \right)$. Поэтому результирующая усилий T_x и $\left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right)$ в проекции на ось z будет

$$-T_x \vartheta_x dy + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) \left(\vartheta_x + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} dx \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} (T_x \vartheta_x) dx dy.$$

Грань C_1B_1 повернута вокруг оси x на угол ϑ_y , а грань A_1D_1 — на угол $(\vartheta_y + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} dy)$. На грани C_1B_1 действует сдвигающее усилие S , а на грани A_1D_1 — сдвигающее усилие $(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx)$. Поэтому результирующая сдвигающих усилий с этих граней в проекции на ось z равна

$$-S\vartheta_y dy + \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx\right) \left(\vartheta_y + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} dx\right) dy = \frac{\partial}{\partial x} (S\vartheta_y) dx dy.$$

По аналогии с двумя предыдущими выражениями можно записать, что результирующая от усилий T_y и $T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy$ с граней C_1A_1 и B_1D_1 равна $\frac{\partial}{\partial y} (T_y\vartheta_x) dx dy$, а результирующая от усилий S и $(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy)$ с граней C_1A_1 и B_1D_1 составляет $\frac{\partial}{\partial y} (S\vartheta_x) dx dy$. Сбрав эти слагаемые и добавив к ним результирующие от внутренних поперечных сил Q_x и Q_y , получим уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (T_x^0 \vartheta_x) + \frac{\partial}{\partial y} (S^0 \vartheta_x) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (T_y^0 \vartheta_y) + \frac{\partial}{\partial x} (S^0 \vartheta_y) = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

В соответствии со сделанным выше замечанием усилия в срединной плоскости T_x , T_y , S заменены на начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 .

Выразив поперечные силы Q_x и Q_y через внутренние изгибающие моменты с помощью зависимостей (4.16) и воспользовавшись формулами (4.10), можно записать

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - p_z^\Phi = 0, \quad (4.31)$$

где

$$\begin{aligned} p_z^\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Для пластины постоянной толщины получим

$$DV^2 \nabla^2 w - p_z^\Phi = 0. \quad (4.33)$$

Если пластина нагружена только контурными внешними усилиями q_x и q_y (в силовых конструкциях обычно собственным весом пластины можно пренебречь), то выражение (4.32) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} p_z^\Phi = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ + \left(\frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial T_y^0}{\partial y} + \frac{\partial S^0}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

При $p_x \equiv 0$ и $p_y \equiv 0$ выражения в скобках в соответствии с уравнениями равновесия (4.2) обращаются в нуль и тогда

$$p_z^\Phi = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.33) является основным линейаризованным уравнением теории устойчивости пластин постоянной толщины. Это линейное однородное уравнение, причем в силу первого допущения его граничные условия однородны. Если считать, что все действующие на пластину внешние нагрузки изменяются пропорционально параметру P , то уравнение (4.33) можно записать в стандартном виде задачи на собственные значения (см. приложение I):

$$M[w] - PL[w] = 0,$$

где

$$M[w] = D\nabla^2 \nabla^2 w;$$

$$L[w] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{T}_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{S}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{S}^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{T}_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Здесь $\bar{T}_x^0 = \bar{T}_x^0(x, y)$, $\bar{S}^0 = \bar{S}^0(x, y)$, $\bar{T}_y^0 = \bar{T}_y^0(x, y)$ — распределение начальных усилий при $P = 1$.

Таким образом, задача определения условий существования изгибных состояний равновесия первоначально плоской пластины свелась к типичной задаче на собственные значения: требуется найти те значения параметра нагрузки P_n , при которых однородное уравнение имеет отличные от тождественного нуля решения, удовлетворяющие заданным однородным граничным условиям.

По форме уравнение (4.33) совпадает с уравнением поперечного изгиба пластины (4.18), только вместо поперечной нагрузки P_z , фигурирующей в уравнении (4.18), в уравнение (4.33) входит величина P_z^Φ , линейно зависящая от поперечного прогиба и начальных усилий в срединной плоскости пластины. Совпадение это естественно: вывод линейаризованного уравнения (4.33) аналогичен выводу уравнения поперечного изгиба пластины, но роль внешней нормальной нагрузки играют проекции внутренних начальных усилий T_x^0 , T_y^0 , S^0 на ось z , появляющиеся в результате учета поворотов граней элемента пластины. Это позволяет трактовать величину p_z^Φ как фиктивную поперечную нагрузку.

На этом основан вывод линейаризованных уравнений задач устойчивости стержней, пластин и оболочек с помощью приема **фиктивной нагрузки**. Прием состоит в следующем. Предположим, что нам известно уравнение поперечного изгиба стержня, пла-

стины или оболочки, полученное в обычной линейной постановке и имеющее, например, вид

$$M[w] - p_z = 0, \quad (4.35)$$

где $M[w]$ — некоторое дифференциальное выражение; w — поперечный прогиб (или какая-нибудь другая искомая функция); p_z — внешняя поперечная нагрузка.

Тогда для получения линеаризованного уравнения задачи устойчивости, рассмотрев деформированное состояние элемента, достаточно найти фиктивную нагрузку p_z^Φ и заменить поперечную нагрузку p_z в уравнении (4.35) на p_z^Φ . Следует подчеркнуть, что вопрос о граничных условиях для линеаризованного уравнения требует дополнительного изучения.

Поскольку основное уравнение имеет четвертый порядок, в каждой точке контура пластины должны быть заданы два граничных условия. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда участок контура пластины совпадает с одной из координатных линий. Пусть, например, это будет линия $x = 0$.

Геометрические граничные условия линеаризованного уравнения теории устойчивости пластин полностью повторяют геометрические условия линейной теории изгиба пластин: на краю пластины (в данном случае при $x = 0$) может быть запрещен поперечный прогиб w и (или) угол поворота $\frac{\partial w}{\partial x}$.

Силовые граничные условия выражают условия равновесия краевых элементов пластины. Если контур пластины свободен от нагрузок, то силовые граничные условия уравнения (4.33), очевидно, полностью повторяют силовые граничные условия линейной теории поперечного изгиба пластин. Так, например, для свободно опертого края ($x = 0$) силовое граничное условие будет

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Если учесть геометрическое граничное условие $w = 0$, то для свободно опертого края при $x = 0$ окончательно можно записать граничные условия

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.36)$$

Если при $x = 0$ край полностью свободен, то $M_x = 0$ и $Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0$, т. е. на свободном ненагруженном краю выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0; \\ 2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

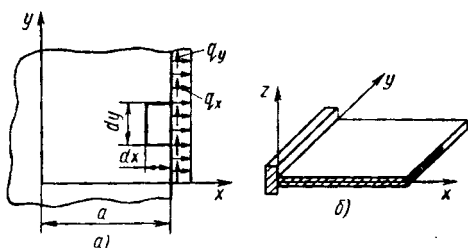


Рис. 4.6

эти нагрузки не внесут никаких изменений в граничные условия свободного опирания (4.36).

Когда край пластины свободен (или упруго оперт), внешние контурные нагрузки входят в граничные условия линеаризованного уравнения. Так, например, рассмотрим незакрепленный край пластины $x = a$, нагруженный мертвыми распределенными усилиями $q_x(y)$ и $q_y(y)$ (рис. 4.6, а). Первое граничное условие, очевидно, остается таким же, как и для ненагруженного свободного края: $M_x = 0$. Для получения второго граничного условия рассмотрим равновесие краевого элемента пластины с размерами dy и dx . Уравнение равновесия такого элемента в проекции на ось z , сформулированное для отклоненного состояния, имеет вид

$$-Q_x^* + T_x^0 \vartheta_x + S^0 \vartheta_y = 0.$$

Поскольку при $x = a$ из (4.4) следует $T_x^0 = q_x$ и $S^0 = q_y$, второе граничное условие в рассматриваемом случае будет

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - q_x \frac{\partial w}{\partial x} - q_y \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Все сказанное справедливо и в случае упругозакрепленного края пластины, причем для ненагруженного края граничные условия линеаризованного уравнения (4.33) полностью повторяют граничные условия линейной теории поперечного изгиба пластин.

Рассмотрим пластину, край которой при $x = 0$ подкреплен упругим стержнем (рис. 4.6, б). Стержень считаем ненагруженным в продольном направлении и имеющим постоянную изгибную жесткость EJ в плоскости, перпендикулярной срединной плоскости пластины; жесткостью стержня на кручение пренебрегаем. Тогда первое граничное условие, как и для свободного края, будет $M_x = 0$. Для формулировки второго граничного условия мысленно отделим стержень от края пластины. Обозначив прогиб стержня $w_c(y)$, при $x = 0$ можно записать $w = w_c(y)$. Со стороны пластины на стержень передается контактная нагрузка $q_k = -Q_x^*$. Прогиб стержня под действием этой нагрузки описывается дифференциальным уравнением

$$EJ \frac{d^4 w_c}{dy^4} = q_k.$$

Когда на краю пластины прогибы полностью запрещены, внешние контурные нагрузки никак не отражаются на граничных условиях. Например, если по свободно опертому краю $x = 0$ к пластине в ее плоскости приложены внешние распределенные нагрузки $q_x(y)$ и $q_y(y)$, то

Поскольку прогиб стержня должен быть равен нормальным перемещениям края пластины, т. е. при $x = 0$ $\frac{d^4 w_c}{dy^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$, второе граничное условие будет

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0.$$

Если стержень, подкрепляющий край пластины, нагружен в продольном направлении и внутреннее осевое усилие в стержне равно $N^0(y)$, то граничное условие при $x = 0$ принимает вид

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial y} \left(N^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0.$$

В частности, когда стержень сжат одной силой P , $N_0 = -P$ и при $x = 0$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0.$$

Аналогично можно сформулировать условия сопряжения двух пластин различной изгибной жесткости.

Граничные условия линейаризованного уравнения на криволинейных участках контура пластины, свободных от контурных нагрузок или закрепленных неподвижно относительно поперечного прогиба, не отличаются от граничных условий линейной теории поперечного изгиба пластин, подробное обоснование которых можно найти, например, в работе [12]. В тех случаях, когда внешние контурные нагрузки приложены к незакрепленному относительно поперечных перемещений криволинейному краю пластины, силовые граничные условия формулируются из условия равновесия краевого элемента пластины подобно тому, как это сделано выше для прямолинейного края.

Основное линейаризованное уравнение для пластины постоянной толщины (4.33), полученное в декартовой системе координат, удобно для решения задач устойчивости пластин, контур которых совпадает с координатными линиями. Для пластин другой формы может оказаться удобной другая, не декартова система координат. Так, для круглых пластин основное уравнение удобнее представить в полярных координатах.

Линейаризованное уравнение в новой системе координат можно получить двумя способами: путем повторения вывода в новой системе координат или путем формального преобразования координат. Воспользуемся вторым способом.

Преобразование линейаризованного уравнения (4.33) при переходе к новой системе координат производится аналогично тому, как это делается для уравнения поперечного изгиба пластин [17]. Например, при переходе к цилиндрической системе координат (рис. 4.7, а) внешний вид уравнения (4.33) сохраняется

$$DV^2 \nabla^2 w - p_z^\Phi = 0.$$

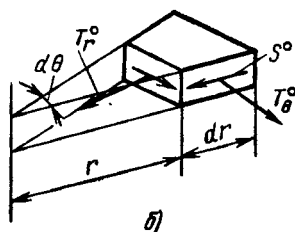
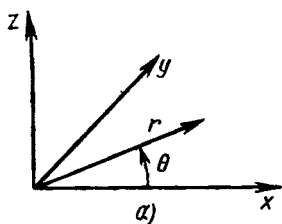


Рис. 4.7

Но оператор Лапласа равен

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2 (*)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (*) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (*)}{\partial \theta^2}.$$

Для основного случая, когда пластина нагружена только контурными усилиями, фиктивная поперечная нагрузка p_z^Φ в полярной системе координат определяется выражением

$$p_z^\Phi = T_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_\theta^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2S^0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right),$$

где T_r^0 , T_θ^0 , S^0 — начальные внутренние усилия в срединной плоскости пластины в полярной системе координат (рис. 4.7, б).

Для внутренних моментов в полярной системе координат имеем

$$M_r = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right];$$

$$M_\theta = D \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right];$$

$$M_{r\theta} = D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial r} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right).$$

Бигармоническое уравнение (4.7) сохраняет свой внешний вид $\nabla^2 \nabla^2 \Phi^0 = 0$. В полярной системе координат функция начальных усилий Φ^0 определяется соотношением

$$T_r^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial \theta^2}; \quad T_\theta^0 = \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial r^2}; \quad S^0 = -\frac{1}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \theta} \right).$$

Нетрудно записать граничные условия для линеаризованного уравнения в новой системе координат для кругового контура пластины. Например, для жестко защемленного кругового контура граничные условия будут:

$$1) \ w = 0; \quad 2) \ \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Для свободно опертого кругового контура:

$$1) \ w = 0; \quad 2) \ M_r = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Аналогично уравнение (4.33) можно записать в другой произвольной ортогональной системе координат [12].

В заключение отметим, что основное линейаризованное уравнение легко обобщить для пластины, связанной с упругим винклеровским основанием, тогда

$$DV^2\nabla^2 w + kw - p_z^\Phi = 0, \quad (4.37)$$

где k — коэффициент жесткости (коэффициент постели) упругого основания.

Формулировка граничных условий и величина p_z^Φ не зависят от упругого основания.

§ 21. Решение основного уравнения для прямоугольных пластин

Уравнение в частных производных с переменными коэффициентами не удастся проинтегрировать в общем виде, но для нескольких практически важных случаев уравнение (4.33) допускает точное решение.

Сначала рассмотрим простейший из таких случаев — устойчивость удлиненной пластины, равномерно сжатой в поперечном направлении (рис. 4.8, а). Граничные условия вдоль удлиненных сторон произвольны, но неизменны вдоль всей пластины. Размеры пластины в продольном направлении считаем настолько большими, что условия закрепления коротких сторон пластины не играют никакой роли (ниже дана оценка той длины пластины, начиная с которой можно пренебречь влиянием закреплений коротких сторон пластины).

Предварительно решим вспомогательную задачу по определению усилий в срединной плоскости пластины. Если считать, что на длинных кромках не накладывается никаких ограничений на перемещения v_0 , то решение этой задачи очевидно:

$$T_x^0 = -q; \quad T_y^0 = 0; \quad S^0 = 0.$$

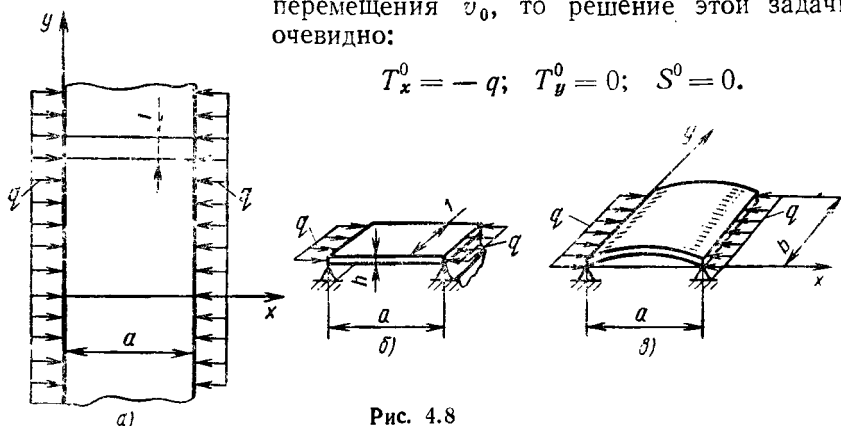


Рис. 4.8

Тогда уравнение (4.33) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Для рассматриваемой удлиненной пластины можно предположить, что при потере устойчивости изгиб происходит по цилиндрической поверхности $w = w(x)$. Тогда уравнение в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

С точностью до обозначений оно тождественно линейризованному уравнению для прямого стержня постоянной изгибной жесткости EJ , сжатого продольной силой P (см. § 13):

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0.$$

Такое совпадение достаточно очевидно: задача об устойчивости пластины в рассматриваемом случае эквивалентна задаче об устойчивости полоски единичной ширины (рис. 4.8, б) с изгибной жесткостью $EJ = 1D$, сжатой продольной силой $P = 1q$.

Решения уравнения, полученные для стержня, можно перенести на рассматриваемую задачу устойчивости удлиненной пластины. В частности, если продольные края пластины свободно оперты, то можно записать $q_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} D$. Наименьшее собственное значение, равное критическому значению нагрузки, получим при $n = 1$

$$q_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (4.38)$$

При этом форма изогнутой поверхности пластины при потере устойчивости описывается (с точностью до масштаба) зависимостью $w = A \sin \frac{\pi x}{a}$.

При других условиях закрепления продольных сторон пластины, как и для стержня постоянной изгибной жесткости, получим

$$q_{кр} = C \frac{\pi^2 D}{a^2}, \quad (4.38a)$$

где C — коэффициент, который находят из решения соответствующей задачи для стержня (см. § 13). Первая собственная функция задачи устойчивости стержня дает форму изогнутой поверхности пластины при потере устойчивости.

В задачах устойчивости пластин результаты принято представлять в виде не критических нагрузок, а критических напря-

жений. Так, в рассматриваемой задаче результат можно выразить через критические сжимающие напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = C \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2. \quad (4.39)$$

На эту формулу следует обратить особое внимание, так как из нее особенно хорошо видно, что потеря устойчивости тонких пластин при малых значениях отношения $\left(\frac{h}{a} \right)$ может происходить при низких напряжениях.

Переходя к другим случаям точного интегрирования основного линейаризованного уравнения, заметим, что решение, полученное для удлиненной пластины можно использовать и для пластины конечных размеров с двумя свободными краями (рис. 4.8, в). В этом случае с достаточной степенью точности можно принять $w = w(x)$. Однако граничные условия на свободных краях не будут точно удовлетворены. При $\frac{h}{b} \ll 1$ это не повлияет на значения критических нагрузок.

Для прямоугольной пластины с конечным отношением сторон основное линейаризованное уравнение (4.33) допускает точное решение при следующих условиях.

1. Начальное напряженное состояние однородно:

$$T_y^0 = \text{const}, \quad T_x^0 = \text{const}, \quad S^0 = 0.$$

2. Две противоположные стороны пластины (например, при $x = 0$ и $x = a$) свободно оперты, а граничные условия на двух других сторонах произвольны, но неизменны вдоль каждой из сторон.

В этом случае основное линейаризованное уравнение (4.33) принимает вид

$$D \left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4.40)$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = a$: 1) $w = 0$; 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Поэтому решение уравнения (4.40) можно найти в следующей форме:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} Y_n \sin \frac{n\pi x}{a},$$

где $Y_n = Y_n(y)$ — функции одной независимой переменной y .

Подставив этот ряд в уравнение (4.40), после сокращения на $\sin \frac{n\pi x}{a}$ получим систему обыкновенных независимых дифференциальных уравнений для функций Y_n

$$D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 Y_n - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 Y_n'' + Y_n^{IV} \right] + T_x^0 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 Y_n - T_y^0 Y_n'' = 0.$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по y .

Группируя соответствующие производные, можно записать

$$Y_n^{IV} - 2 \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{T_y^0}{2D} \right] Y_n'' + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{T_x^0}{D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] Y_n = 0. \quad (4.41)$$

Решение этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами не составляет принципиальных трудностей. Заметим, что аналогичное уравнение встречалось при исследовании устойчивости прямых стержней, связанных с упругим основанием (см. § 15).

Характеристическое уравнение имеет вид

$$r^4 - 2 \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{T_y^0}{2D} \right] r^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{T_x^0}{D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] = 0,$$

откуда для каждого значения n получаются четыре корня:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \pm \sqrt{\left[\frac{T_y^0}{2D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]} + \dots \\ &\leftarrow \dots \frac{\dots}{\dots} \dots \\ &+ \sqrt{\left[\frac{T_y^0}{2D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{T_x^0}{D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]}; \\ r_{3,4} &= \pm \sqrt{\left[\frac{T_y^0}{2D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]} - \dots \\ &\leftarrow \dots \frac{\dots}{\dots} \dots \\ &- \sqrt{\left[\frac{T_y^0}{2D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{T_x^0}{D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (4.41) для каждого из значений n будет

$$Y_n = \sum_{i=1}^4 A_i e^{r_i y}.$$

Подчиняя это решение четырем однородным граничным условиям (по два граничных условия на каждой из сторон пластины, параллельных оси x), получаем систему четырех однородных линейных уравнений относительно четырех неизвестных A_i . Равенство нулю определителя этой системы приводит к уравнению, дающему возможность найти собственные значения задачи. Перебирая различные числа полуволн n , находим то из них, которое приводит к наименьшему собственному значению задачи. Оно будет критическим. Рассмотрим подробнее несколько частных случаев.

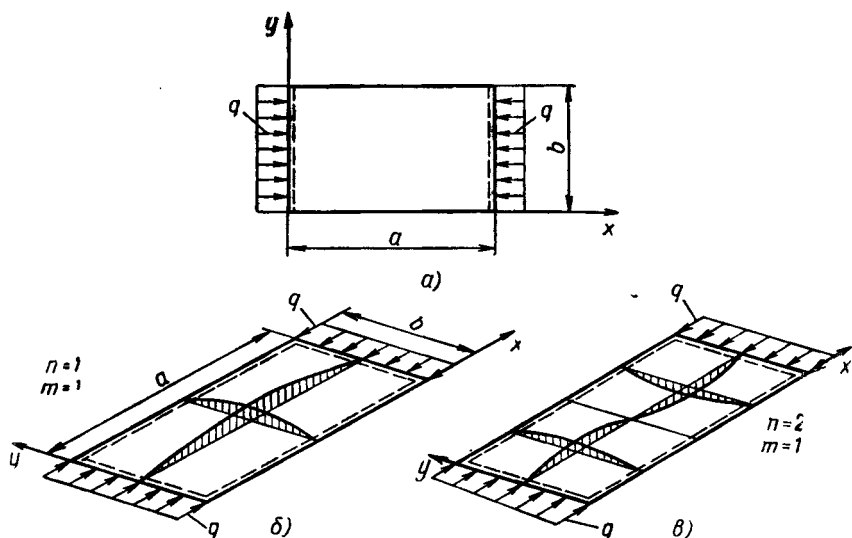


Рис. 4.9

Пластина равномерно сжата в одном направлении (рис. 4.9, а). В этом случае $T_y^0 = 0$, $T_x^0 = -q$. Учитывая зависимость (4.38) и предполагая, что при закреплении краев пластины $y = 0$ и $y = b$ повышается значение q_n , получаем неравенство

$$\frac{q_n}{D} > \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2. \quad (4.42)$$

Тогда решение уравнения (4.41) для каждого n можно представить в таком виде:

$$Y_n(y) = A_1 \sin \alpha_n y + A_2 \cos \alpha_n y + A_3 \operatorname{sh} \beta_n y + A_4 \operatorname{ch} \beta_n y, \quad (4.43)$$

где

$$\alpha_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right) \sqrt{-1 + \sqrt{\frac{q}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2}};$$

$$\beta_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right) \sqrt{1 + \sqrt{\frac{q}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2}}.$$

Заметим, что неравенство (4.42) может не выполняться только в тех редких случаях, когда края пластины, параллельные оси x , соединены с более «слабыми» сжатыми элементами. Например, неравенство (4.42) может не выполняться для пластины, один край которой свободен, а другой соединен с более тонкой пластиной, сжатой в направлении оси x .

Рассмотрим устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по всему контуру. Граничные условия при $y = 0$ и $y = b$:

$$1) Y_n(0) = 0; \quad 2) Y_n''(0) = 0; \quad 3) Y_n(b) = 0; \quad 4) Y_n''(b) = 0. \quad (4.44)$$

В данном случае нетрудно предугадать решение уравнения (4.41), удовлетворяющее граничным условиям свободного опирания, как это сделано в § 15 для шарнирно-опертого стержня на упругом основании. Для всех других вариантов граничных условий такое угадывание невозможно. Поэтому получим решение задачи устойчивости свободно опертой пластины общим путем, справедливым для всех других пластин, сжатых в одном направлении и свободно опертых вдоль краев $x = 0$ и $x = a$.

Подчинение общего решения (4.43) граничным условиям (4.44) приводит к системе четырех уравнений для каждого n :

$$\begin{aligned} A_2 &+ A_4 = 0; \\ -\alpha_n^2 A_2 &+ \beta_n^2 A_4 = 0; \\ A_1 \sin \alpha_n b + A_2 \cos \alpha_n b + A_3 \operatorname{sh} \beta_n b + A_4 \operatorname{ch} \beta_n b &= 0; \\ -\alpha_n^2 A_1 \sin \alpha_n b - \alpha_n^2 A_2 \cos \alpha_n b + \beta_n^2 A_3 \operatorname{sh} \beta_n b + \beta_n^2 A_4 \operatorname{ch} \beta_n b &= 0. \end{aligned}$$

Для действительных значений α_n и β_n два первых уравнения дают $A_2 = 0$; $A_4 = 0$. Тогда оставшиеся два уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 \sin \alpha_n b + A_3 \operatorname{sh} \beta_n b &= 0; \\ -\alpha_n^2 A_1 \sin \alpha_n b + \beta_n^2 A_3 \operatorname{sh} \beta_n b &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель этой системы уравнений, получаем $(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \sin \alpha_n b \operatorname{sh} \beta_n b = 0$.

Поскольку $\beta_n \neq 0$ и α_n и β_n — действительные величины, из этого равенства следует, что $\sin \alpha_n b = 0$. Тогда $A_3 = 0$. Таким образом, отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие всем граничным условиям решения возможны только при $\sin \alpha_n b = 0$, т. е. при $\alpha_n b = m\pi$; ($m = 1, 2, \dots$), и имеют вид (для каждого $n = 1, 2, \dots$)

$$Y_n = A_1 \sin \frac{m\pi y}{b}; \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Используя формулу для α_n , получаем собственные значения нагрузки q_{nm} :

$$q_{nm} = \left[\left(\frac{m\pi}{nb} \right)^2 + 1 \right]^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 D \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.45)$$

и находим собственные функции задачи

$$w_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots).$$

На рис. 4.9, a и b показан вид функций $w_{11}(x, y)$ и $w_{21}(x, y)$. Для определения критического значения нагрузки необходимо выяснить, при каких n и m по формуле (4.45) можно найти

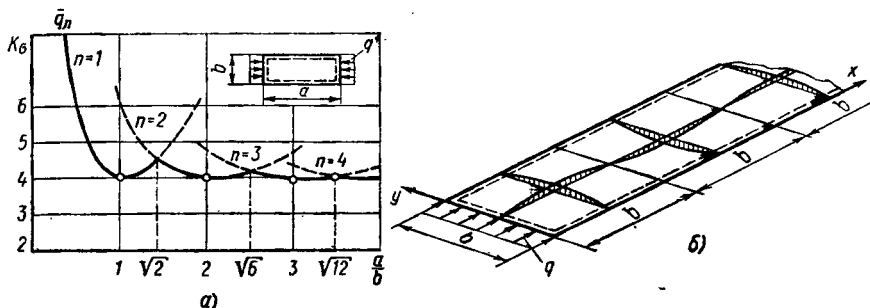


Рис. 4.10

наименьшее значение q_{nm} . Так как число полуволн m входит только в числитель, то, очевидно, наименьшее значение q_{nm} может быть при $m = 1$. Учитывая это, перепишем формулу (4.45):

$$\bar{q}_{n1} = \bar{q}_n = \frac{q_{n1}}{\frac{\pi^2 D}{b^2}} = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2; \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Дальнейший анализ удобно проводить с помощью графиков, аналогичных тем, которые использовались при исследовании задачи устойчивости стержня, связанного с упругим основанием (стр. 101). Последовательно принимая $n = 1, 2, 3$ и т. д., получаем

$$\bar{q}_1 = \left(\frac{1b}{a} + \frac{a}{1b} \right)^2; \quad \bar{q}_2 = \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b} \right)^2; \quad \bar{q}_3 = \left(\frac{3b}{a} + \frac{a}{3b} \right)^2 \dots$$

На рис. 4.10, а приведены соответствующие графики. Участки кривых, лежащие ниже точек пересечения, будут давать наименьшие и, следовательно, критические значения $\bar{q}_{кр}$. Приравнявая значения $\bar{q}_n$ и $\bar{q}_{n+1}$, нетрудно установить, что соответствующие им кривые пересекаются при $\frac{a}{b} = \sqrt{n(n+1)}$.

Окончательный результат обычно представляют в виде

$$q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (4.46)$$

или через критические сжимающие напряжения

$$\sigma_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (4.46a)$$

где K_{σ} — коэффициент, зависящий от отношения сторон пластины (рис. 4.10, а, сплошная линия).

В последних двух формулах в качестве характерного размера пластины принята ширина b , а не длина a , как это сделано в формуле (4.38). Такая запись расчетных формул удобна при $a > b$, когда размер b существенно влияет на критические значения

нагрузки. Если $a < b$ (пластина сжата вдоль коротких сторон), то расчетные формулы удобнее представить в виде (при $n = 1$):

$$q_{кр} = \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{\pi^2 D}{a^2},$$

или

$$\sigma_{кр} = \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2.$$

Из последних зависимостей, в частности, видно, что если ограничиться точностью порядка 5%, то примерно при $\frac{a}{b} < \frac{1}{5}$ влиянием закреплений коротких сторон пластины можно пренебречь и расчет вести по формуле (4.38).

При $\frac{a}{b} > (3 \div 4)$ коэффициент K_σ практически перестает изменяться с ростом отношения $\frac{a}{b}$, тогда можно принять $K_\sigma = 4$.

В этом случае число полуволн n , образующихся при потере устойчивости пластины на ее поверхности, примерно равно отношению $\frac{a}{b}$. Таким образом, удлиненная пластина при потере устойчивости как бы делится на ряд квадратных свободно опертых по всему контуру пластин (рис. 4.10, б), для каждой из которых $K_\sigma = 4$. Тогда становится ясным, что увеличение размера a путем «наращивания» квадратных пластин не приводит к изменению критической нагрузки.

В такой же последовательности с использованием зависимости (4.43) решают задачи устойчивости пластин при любых других вариантах закрепления краев $y = 0$ и $y = b$ в том числе и при упругом закреплении, при условии, что по краям $x = 0$ и $x = a$ пластина свободно опирается, выполняется неравенство (4.42) и $S^0 = 0$, $T_x^0 = \text{const}$, $T_y^0 = \text{const}$. Окончательные расчетные формулы имеют вид (4.46), но коэффициенты K_σ в этих формулах иные. На рис. 4.11 приведены зависимости коэффициентов K_σ для основных вариантов закрепления краев пластины. Следует отметить, что при неподвижно закрепленных относительно поперечного прогиба w краях пластины коэффициент Пуассона μ не входит в граничные условия. Поэтому коэффициенты K_σ не зависят от μ . Но для пластин с одним свободным краем (две нижние кривые на рис. 4.11) коэффициент Пуассона непосредственно фигурирует в граничных условиях. Поэтому для пластин со свободным краем коэффициенты K_σ зависят от μ и, приводя конкретные числовые значения этих коэффициентов, следует указывать, для каких значений μ они получены.

В заключение заметим, что при выполнении граничных условий свободного опирания по краям $x = 0$ и $x = a$ аналогичное решение можно получить и в случае $T_x^0 = 0$, $T_y^0 = -q$, $S^0 = 0$;

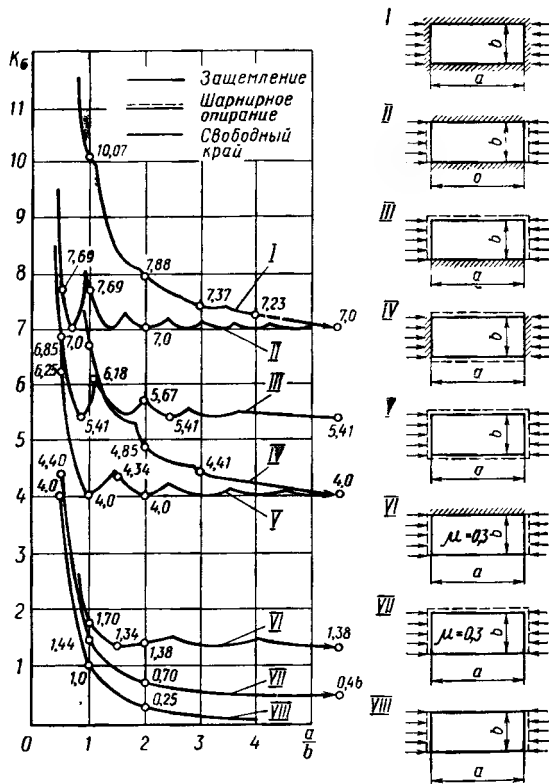


Рис. 4.11

только вместо представления решения в виде (4.43) нужно пользоваться общим решением уравнения (4.41).

Рассмотрим прямоугольную пластину, равномерно сжатую в двух направлениях (рис. 4.12, а). В том случае, когда $S^0 = 0$, $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = -q_y$ и выполняются граничные условия рассмотренной сейчас задачи, можно применять намеченную выше общую схему решения. Для упрощения расчетов ограничимся решением задачи устойчивости прямоугольной пластины, свободно опертой по всему контуру. Для такой пластины, равномерно сжатой в одном направлении, выше найдена система собственных функций. В рассматриваемом случае решение уравнения (4.40) можно искать в виде

$$w_{nm}(x, y) = A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Система найденных собственных функций полная, поэтому, разыскивая решение в таком виде, можем быть уверены в том, что получим все собственные функции решаемой задачи. Под-

ставив $w_{nm}(x, y)$ в уравнение (4.40) и сократив произведение $\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$, входящее во все слагаемые, получим уравнение

$$A_{nm} \left\{ D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - q_x \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - q_y \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right\} = 0.$$

Для возможности существования A_{nm} , не равного нулю, выражение в фигурных скобках должно быть равно нулю. Это условие дает выражение, определяющее собственные значения задачи

$$q_x \left(\frac{n}{a} \right)^2 + q_y \left(\frac{m}{b} \right)^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 D. \quad (4.47)$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Например, при $q_x = q_y = q$ из (4.47) получим собственные значения

$$q_{nm} = \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + m^2 \right] \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Очевидно, наименьшее собственное значение, равное критическому, будет при $m = n = 1$; следовательно,

$$q_{кр} = \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Независимо от отношения сторон пластины она будет терять устойчивость по форме

$$w_{11}(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

В частности, для квадратной пластины при $a = b$

$$q_{кр} = 2 \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

При сжатии квадратной пластины равными усилиями в двух направлениях $q_{кр}$ оказывается в 2 раза меньше по сравнению с $q_{кр}$ в случае сжатия пластины в одном направлении. Если сжи-

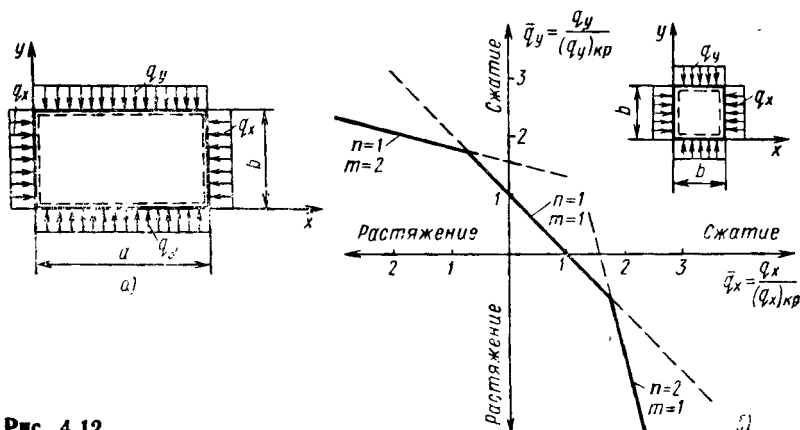


Рис. 4.12

мающие нагрузки q_x и q_y считать возрастающими пропорционально одному параметру и обозначить $q_x = q$; $q_y = \nu q$, где $\nu > 0$ — фиксированная величина, то из выражения (4.47) можно получить следующие собственные значения задачи:

$$q_{nm} = \frac{\left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + m^2 \right]^2}{\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \nu m^2} \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

При $a > b$ наименьшее значение q_{nm} может быть только при $m = 1$. Следовательно,

$$q_{кр} = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

где

$$K_\sigma = \frac{\left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + 1 \right]^2}{\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \nu}.$$

Для каждого отношения сторон $\frac{a}{b}$ и каждого значения ν число полуволн n следует подбирать из условия минимума K_σ , подобно тому, как это делалось для пластины, сжатой в одном направлении. Для удлиненной пластины при $\frac{a}{b} \ll 1$ сжатие в направлении y не будет влиять на устойчивость пластины. В этом случае, как при сжатии в одном направлении, получаем $n = 1$ и $q_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2}$.

При других граничных условиях решение получается значительно более громоздким, но результаты качественно аналогичны полученным выше: для пластины с конечным отношением сторон при сжатии в одном направлении уменьшаются критические усилия в другом направлении, а для удлиненных пластин сжатие в продольном направлении не влияет на критические усилия сжатия в поперечном направлении.

Если прямоугольная пластина равномерно сжата в одном направлении и равномерно растянута в другом направлении, т. е. если $S^0 = 0$ и $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = +q_y$, то для пластины со свободно опертым контуром можно воспользоваться результатами решения предыдущей задачи. Для этого достаточно изменить знак q_y в выражении (4.47):

$$q_x \left(\frac{n}{a} \right)^2 - q_y \left(\frac{m}{b} \right)^2 = \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 \pi^2 D.$$

При $q_x = q_y = q$ получаем собственные значения

$$q_{nm} = \frac{\left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{n}{a} \right)^2 - \left(\frac{m}{b} \right)^2} \pi^2 D.$$

В частности, для квадратной пластины при $a = b$

$$q_{nm} = \frac{(n^2 + m^2)}{(n^2 - m^2)} \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Наименьшее значение q_{nm} может быть только при $m = 1$. Далее необходимо подобрать значение n , обеспечивающее наименьшее собственное значение нагрузки. Последовательно принимая $n = 1, 2, 3, \dots$, получаем $q_{11} = \infty$; $q_{21} = \frac{25}{3} \frac{\pi^2 D}{b^2}$; $q_{31} = \frac{25}{2} \frac{\pi^2 D}{b^2}$ и т. д.

Следовательно, для квадратной пластины, сжатой в одном направлении и растянутой в другом равными по абсолютной величине усилиями q ,

$$q_{кр} = q_{21} = \frac{25}{3} \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Потеря устойчивости происходит по форме

$$w_{21}(x, y) = A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подобный анализ нетрудно провести и для любого другого отношения сторон пластины и при любых соотношениях между сжимающей и растягивающей нагрузками. Во всех случаях для пластин с конечным отношением сторон при растяжении в направлении одной оси увеличиваются критические значения сжимающей нагрузки в направлении другой оси. Исключение составляет случай потери устойчивости пластины по разворачивающейся поверхности (удлиненная пластина и пластина с двумя свободными краями). При этом растягивающие усилия T_y^0 не влияют на критические сжимающие усилия T_x^0 и при любых растягивающих усилиях можно пользоваться формулой (4.38).

Результаты решения двух последних задач можно объединить одним графиком, дающим критические сочетания как сжимающих, так и растягивающих усилий q_x и q_y . Для квадратной пластины такой график приведен на рис. 4.12, б. Участки прямых, показанные сплошной линией характеризуют критическое сочетание безразмерных усилий $\bar{q}_x$ и $\bar{q}_y$, ломаная линия, состоящая из этих участков, ограничивает область устойчивости рассматриваемой пластины при комбинированном нагружении усилиями q_x и q_y (см. § 6). Величины $(q_x)_{кр}$ и $(q_y)_{кр}$ равны критическим нагрузкам при сжатии в направлении оси x или y и определяются формулой (4.46) при $K_\sigma = 4$.

Аналогичный график нетрудно построить при любых других отношениях сторон прямоугольной пластины. В результате получится ломаная линия, дающая критические сочетания q_x и q_y и, следовательно, отделяющая область устойчивости пластины от области неустойчивости. Начало координат принадлежит, конечно, к первой из этих областей.

§ 22. Решение основного уравнения для круглых пластин

В случае осесимметричного начального напряженного состояния круглой пластины, когда $S^0 = 0$, а начальные усилия $T_r^0 = T_r^0(r)$ и $T_\theta^0 = T_\theta^0(r)$ являются функциями только радиуса r , интегрирование общего уравнения (4.33) сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. В полярной системе координат основное линейаризованное уравнение для пластины, нагруженной контурными внешними усилиями, принимает вид (см. § 20)

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - T_r^0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - T_\theta^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (4.48)$$

В это уравнение входят только четные производные по окружной координате θ , поэтому решение уравнения (4.48) можно найти в виде ряда

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos n\theta, \quad (4.49)$$

где $w_n(r)$ — некоторые функции координаты r . При этом граничные условия могут быть произвольными, но неизменными по всей контуре пластины.

Подстановка выражения (4.49) в уравнение (4.48) приводит к системе обыкновенных независимых дифференциальных уравнений

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) - T_r^0 \frac{d^2 w_n}{dr^2} - T_\theta^0 \left(\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.50)$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие заданным граничным условиям, дают собственные функции и собственные значения задачи; наименьшее из собственных значений параметра нагрузки будет критическим.

Уравнение (4.50) наиболее просто интегрируются при постоянных сжимающих начальных усилиях T_r^0 и T_θ^0 (рис. 4.13):

$$T_r^0 = -q = \text{const}; \quad T_\theta^0 = -q = \text{const}.$$

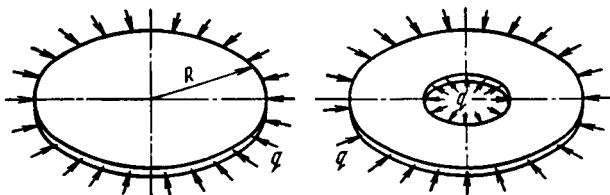


Рис. 4.13

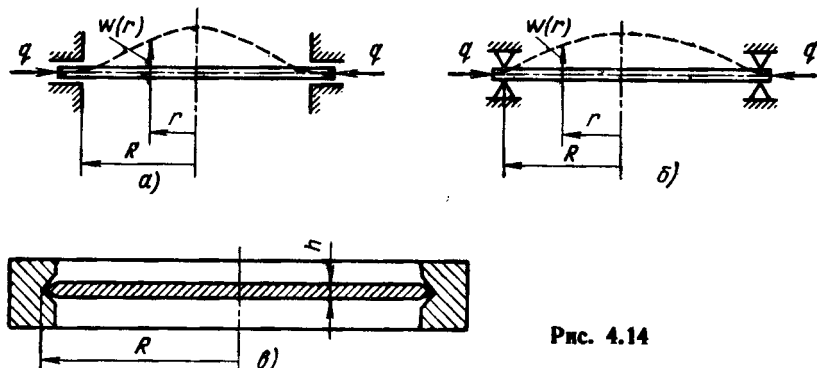


Рис. 4.14

В этом случае уравнения (4.50) будут иметь вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) + k^2 \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) = 0, \quad (4.51)$$

где $k^2 = \frac{q}{D}$.

При осесимметричной форме потери устойчивости (при $n = 0$) решение уравнения (4.51) имеет вид

$$w_0(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr) + C_3 \ln kr + C_4;$$

при неосесимметричной форме потери устойчивости, когда $n \neq 0$,

$$w_n(r) = C_1 J_n(kr) + C_2 Y_n(kr) + C_3 r^{-n} + C_4 r^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где $J_n(kr)$ и $Y_n(kr)$ — функции Бесселя первого и второго рода; эти функции табулированы. Дальнейшее решение задачи не вызывает никаких трудностей. Рассмотрим несколько примеров.

Сплошная пластина равномерно сжата по контуру (рис. 4.14). Независимо от способа закрепления контура прогибы и углы поворота в центре сплошной пластины не должны обращаться в бесконечность. Поэтому для осесимметричной и неосесимметричной форм потери устойчивости необходимо принять $C_2 = 0$ и $C_3 = 0$, так как $Y_0(kr) \rightarrow \infty$, $\ln kr \rightarrow \infty$ и $Y_n(kr) \rightarrow \infty$, $r^{-n} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Необращающиеся в бесконечность при $r = 0$ решения для сплошной пластины как при осесимметричной, так и при неосесимметричной форме потери устойчивости имеют вид

$$w_n(r) = A_1 J_n(kr) + A_2 r^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.52)$$

Если контур пластины зашцемен (рис. 14,4, а), то граничные условия на этом контуре при $r = R$: 1) $w = 0$; 2) $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$. Соответственно граничные условия для $w_n(r)$: 1) $w_n(R) = 0$; 2) $w'_n(R) = 0$.

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r .

Подчиняя решение (4.52) этим граничным условиям, получаем однородную систему уравнений относительно произвольных постоянных A_1 и A_4 :

$$A_1 J_n(kR) + A_4 R^n = 0;$$

$$A_1 J'_n(kR) + A_4 n R^{n-1} = 0.$$

Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение

$$n R^{n-1} J_n(kR) - R^n J'_n(kR) = 0. \quad (4.53)$$

Функции Бесселя первого рода связаны между собой дифференциальным соотношением

$$J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n - J_{n-1}.$$

Поэтому

$$J'_n(kr) = \frac{n}{r} J_n(kr) - k J_{(n+1)}(kr).$$

При $k \neq 0$ из уравнения (4.53) получим

$$J_{(n+1)}(kR) = 0. \quad (4.54)$$

Корни полученного характеристического уравнения приводят к собственным значениям параметра k , связанного с внешним усилием q . Для определения критической нагрузки необходимо вычислить наименьшее собственное значение параметра k , поэтому для каждого n достаточно найти первый корень уравнения (4.54). Так, для $n = 0$ находим $(kR)_1 = 3,832$; для $n = 1$ — первый корень $(kR)_1 = 5,135$ и т. д. Следовательно, для сплошной пластины с заземленным наружным контуром наименьшее собственное значение q_1 дает первый корень уравнения (4.54) при $n = 0$, т. е.

$$q_{кр} = \frac{(3,832)^2 D}{R^2} = 14,68 \frac{D}{R^2}. \quad (4.55)$$

Потеря устойчивости заземленной по контуру пластины происходит по осесимметричной форме и вид изогнутой срединной поверхности (рис. 4.14, а) описывается (с точностью до постоянного множителя) функцией, получаемой из (4.52) при $kR = 3,832$ и $n = 0$:

$$w_{кр}(r) = \left[1 - \frac{J_0\left(3,832 \frac{r}{R}\right)}{J_0(3,832)} \right],$$

поскольку из первого граничного условия при $n = 0$ следует

$$A_4 = -A_1 J_0(kR) = -A_1 J_0(3,832).$$

Если край пластины свободно оперт (рис. 4.14, б), то при $r = R$ граничные условия: 1) $w = 0$; 2) $M_r = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right] = 0$ приводят к граничным условиям для функций

$$w_n(r): \quad 1) w_n(R) = 0; \quad 2) w_n''(R) + \mu \frac{w_n'(R)}{R} = 0.$$

Подчинение решения (4.52) этим граничным условиям снова приводит к однородной системе уравнений относительно неизвестных A_1 и A_4 . Несложный анализ, подобный проведенному выше, показывает, что потеря устойчивости свободно опертой пластины тоже происходит по осесимметричной форме, поскольку именно этой форме прогиба пластины соответствует наименьшее собственное значение $(kR)_1$. Критическая нагрузка

$$q_{кр} = K \frac{D}{R^2}. \quad (4.56)$$

В отличие от случая защемленной пластины для свободно опертой пластины коэффициент K зависит от коэффициента Пуассона μ , который входит во второе граничное условие. При $\mu = 0,3$ коэффициент $K = 4,2$.

Аналогичное решение нетрудно получить и в случае упругого закрепления контура пластины. Причем окончательную расчетную формулу можно привести к виду (4.56), где K изменяется в зависимости от жесткости упругой заделки в пределах от 14,68 (абсолютно жесткая заделка) до 4,2 (свободное опирание при $\mu = 0,3$).

Устойчивость равномерно сжатых кольцевых пластин (рис. 4.13, б) тоже может быть исследована с помощью уравнения (4.51). Но в этом случае решение получается значительно более громоздким: в выражениях для $w_n(r)$ остаются все четыре произвольные постоянные и подчинение этих выражений граничным условиям на внутреннем и наружном контурах пластины приводит к системе четырех однородных уравнений. Окончательный результат представляется тоже в виде формулы (4.56). В этой формуле для кольцевых пластин коэффициент K зависит не только от граничных условий, но и от отношения внутреннего и наружного радиусов. Значения коэффициента K для всех практических интересных случаев табулированы [33, 35].

Температурные задачи устойчивости круглых пластин. Линеаризованные уравнения дают возможность найти критический уровень внутренних начальных усилий, независимо от того, какими причинами эти усилия вызваны (наоборот, в закритической области поведение пластины определяется характером внешних причин, приведших к потере устойчивости). Поэтому при осесимметричном нагреве круглой пластины исследование устойчивости плоского состояния равновесия можно проводить с помощью урав-

нения (4.50). Начальные внутренние усилия T_r^0 и T_θ^0 должны быть определены с учетом нагрева пластины.

Рассмотрим наиболее простой случай температурной потери устойчивости пластины. Круглая тонкая пластина равномерно нагревается вместе с массивной обоймой (рис. 4.14, в). Температурные коэффициенты линейного расширения материалов пластины и обоймы соответственно равны α_1 и α_2 . Температура Δt^0 отсчитывается от температуры того начального состояния, при котором радиальный зазор между пластиной и обоймой отсутствует, а контактное усилие q_k равно нулю. Когда $\alpha_1 > \alpha_2$, при нагреве между пластиной и обоймой возникает контактное усилие q_k , равномерно сжимающее пластину (если $\alpha_1 < \alpha_2$, то сжимающее контактное усилие возникает при охлаждении).

В силу симметрии задачи $S^0 = 0$; $T_r^0 = T_\theta^0 = -q_k$. В нагреваемой пластине

$$\epsilon_r^0 = \frac{1}{Eh} (T_r^0 - \mu T_\theta^0) + \alpha_1 \Delta t^0 = -\frac{q_k}{Eh} (1 - \mu) + \alpha_1 \Delta t^0;$$

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{1}{Eh} (T_\theta^0 - \mu T_r^0) + \alpha_1 \Delta t^0 = -\frac{q_k}{Eh} (1 - \mu) + \alpha_1 \Delta t^0;$$

$$\gamma^0 = 0.$$

Если обойму считать жесткой и пренебречь ее деформацией от контактного усилия q_k , то, приравнявая температурные окружные удлинения обоймы окружным удлинениям пластины, получаем

$$q_k = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t^0 E h}{1 - \mu},$$

где E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, причем в данном случае без усложнения задачи можно считать их изменяющимися с температурой.

Для определения критического значения $\Delta t_{кр}^0$ можно воспользоваться формулой (4.56):

$$(q_k)_{кр} = K \frac{D}{R^2}.$$

Откуда следует, что

$$\Delta t_{кр}^0 = K \frac{D(1-\mu)}{R^2 E h (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{K}{12(1+\mu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2.$$

Значение коэффициента K зависит от способа закрепления пластины в обойме (свободное опирание, защемление, упругая заделка).

Примечательно, что в окончательную формулу для $\Delta t_{кр}^0$ не входит модуль упругости материала пластины.

Этот способ используют и для решения более сложных температурных задач устойчивости круглых осесимметрично нагретых

пластины. Сначала из решения задачи термоупругости определяют усилия T_x^0 и T_y^0 , а затем находят наименьшее собственное значение уравнения (4.50). Однако точные решения подобных задач удается найти в исключительных случаях [10]. В общем случае решение получают приближенным методом.

В заключение заметим, что решение задач устойчивости осесимметричной ортотропной пластины переменной толщины при осесимметричном начальном напряженном состоянии тоже можно искать в виде (4.49). В этом случае интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводится решение основного линейаризованного уравнения, может быть выполнено методом начальных параметров [12, 18]. Схема интегрирования аналогична схеме интегрирования основного линейаризованного уравнения для прямого стержня, описанной в § 13.

§ 23. Приближенные решения основного линейаризованного уравнения

Задачи устойчивости пластин решают с помощью тех же приближенных методов, что и задачи поперечного изгиба пластин [11, 17]. Одним из наиболее эффективных методов является метод Галеркина. Выше этот метод использовали при решении одномерных задач устойчивости стержней (см. § 12 и 13). Общая его схема сохраняется и при решении однородных уравнений в частных производных.

Пусть имеется однородное линейное уравнение

$$M[w] - PL[w] = 0, \quad (4.57)$$

где

$$M[w] = D\nabla^2\nabla^2 w;$$

$$L[w] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{T}_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{S}^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{S}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{T}_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Причем P — параметр нагрузки, пропорционально которому увеличиваются все внешние усилия, действующие на пластину; $\bar{T}_x^0 = \bar{T}_x^0(x, y)$, $\bar{S}^0 = \bar{S}^0(x, y)$, $\bar{T}_y^0 = \bar{T}_y^0(x, y)$ — распределение начальных внутренних усилий в срединной плоскости пластины при $P = 1$. Граничные условия для w , заданные на контуре пластины, тоже однородны.

Напомним, что до решения задачи устойчивости пластины необходимо определить начальное напряженное состояние пластины, т. е. найти усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 . При сложных контурных нагрузках и граничных условиях для пластин сложной формы, многосвязных пластин и в некоторых других случаях эта задача обычно может быть решена только с помощью приближенного метода.

При решении задачи методом Галеркина функцию поперечного прогиба задают в виде ряда

$$w = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x, y), \quad (4.58)$$

где c_i — варьируемые параметры; $f_i(x, y)$ — базисные функции, каждая из которых удовлетворяет всем заданным граничным условиям. Подстановка этого ряда в исходное уравнение (4.57) дает некоторую функцию-ошибку, тождественно не равную нулю:

$$L(x, y, P, c_1, c_2, \dots, c_N) \neq 0$$

В силу линейности и однородности исходного уравнения функция-ошибка L будет линейной и однородной относительно варьируемых параметров c_i . Для минимизации функции-ошибки требуют, чтобы она была ортогональна всем базисным функциям $f_i(x, y)$, т. е. выполнялись условия

$$\iint f_i(x, y) L(x, y, P, c_1, c_2, \dots, c_N) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4.59)$$

где интегрирование производится по всей площади пластины.

Полученная система N уравнений линейна и однородна относительно варьируемых параметров c_i . Для существования нетривиальных решений этой системы ее определитель должен быть равен нулю. Равенство нулю определителя однородной системы уравнений приводит к характеристическому уравнению, которое относительно параметра нагрузки P имеет N -ю степень; N корней этого характеристического уравнения дают приближенно N первых собственных значений P_n . Для каждого из этих значений P_n из системы (4.59) все варьируемые параметры можно выразить через какой-нибудь один (например, j -й) и, используя выражение (4.58), приближенно получить N первых собственных функций

$$w_n(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{c_j} f_i(x, y).$$

Если $N \rightarrow \infty$ и система базисных функций $f_i(x, y)$ полная, то в пределе будет получено точное решение, т. е. точно будут найдены все собственные значения и все собственные функции задачи. Но обычно ограничиваются несколькими первыми членами ряда (4.58), поэтому вопрос о полноте системы базисных функций в данном случае представляет теоретический, а не практический интерес.

Намеченную схему решения проиллюстрируем несколькими примерами.

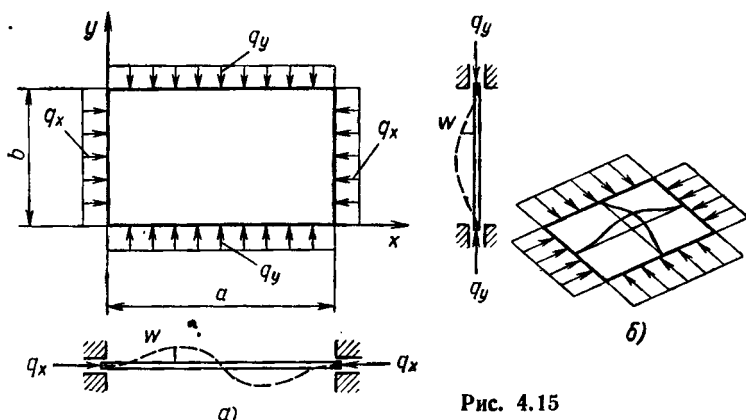


Рис. 4.15

Прямоугольная пластина, защемленная по всему контуру, равномерно сжата в двух направлениях (рис. 4.15, а). Граничные условия задачи

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0;$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=b \quad w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Если на перемещения пластины в ее плоскости не наложено дополнительных связей, то $T_x^0 = -q_x$; $T_y^0 = -q_y$; $S^0 = 0$ и уравнение (4.57) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4.60)$$

Выбор аппроксимирующих функций — наиболее ответственный этап приближенного решения. Аппроксимирующие функции, с одной стороны, должны удовлетворять граничным условиям и физическому смыслу задачи, с другой стороны, должны быть удобными для математической обработки. В данной задаче, если считать форму пластины, близкой к квадратной, то учитывая результаты решенной в § 21 задачи устойчивости свободно опертой пластины, можно ожидать, что потеря устойчивости защемленной пластины будет происходить с образованием одной выпуклины (рис. 4.15, б). Тригонометрические функции удобны для операций дифференцирования и интегрирования, поэтому, ограничившись первым членом ряда (4.58), можно принять

$$w(x, y) = c_1 f_1(x, y), \quad (4.61)$$

где

$$f_1(x, y) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Подставив это выражение в уравнение (4.60), найдем функцию-ошибку

$$L = c_1 D \left[- \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \left(\frac{2\pi}{b} \right)^4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + c_1 q_x \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \\ + c_1 q_y \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{2\pi y}{b}.$$

Умножив функцию-ошибку L на единственную базисную функцию $f_1(x, y)$ и проинтегрировав по всей площади пластины, получим уравнение

$$\int_0^a \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) L dx dy = c_1 \times \\ \times \left\{ D \left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^4 \right] - \right. \\ \left. - q_x \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 - q_y \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right\} ab = 0.$$

Для существования отличных от тождественного нуля решений выражение, стоящее в фигурных скобках, должно обращаться в нуль. Это условие приводит к уравнению, дающему приближенные значения критических соотношений внешних усилий:

$$\left(q_x + \frac{a^2}{b^2} q_y \right)_{кр} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(3 \frac{b^2}{a^2} + 2 + 3 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (4.62)$$

В частности, для квадратной пластины, сжатой в одном направлении, т. е. при $q_x = q$, $q_y = 0$ и $a = b$

$$q_{кр} = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

где $K_\sigma = \frac{32}{3} = 10,67$; уточненное решение для квадратной пластины дает $K_\sigma = 10,07$. В этом случае для квадратной пластины даже при сохранении в решении только одного члена ряда (4.58) метод Галеркина приводит к удовлетворительному результату.

При этом необходимо помнить следующее. Ограничившись в решении одним членом ряда, предполагаем одну вполне определенную форму потери устойчивости пластины. Для квадратной

пластины эта форма близка к действительной, поэтому найденное выше приближенное собственное значение достаточно близко к наименьшему (критическому) точному собственному значению задачи. С изменением параметров упругой системы может происходить резкая качественная смена форм потери устойчивости. Выбранная для приближенного решения функция (4.61) не может отразить такую качественную смену форм потери устойчивости. Поэтому формула (4.62), соответствующая форме потери устойчивости с образованием одной выпучины, при увеличении отношения $\frac{a}{b}$ может приводить к сколь угодно большим погрешностям. Для сравнения на рис. 4.16 приведены зависимости коэффициента K_σ для сжатой в одном направлении защемленной пластины, построенные по выражению (4.62) и результатам уточненного (но приближенного) решения [19]. Из уточненного решения следует, что при $1,1 < \frac{a}{b} < 2$ пластина теряет устойчивость с образованием не одной выпучины, а двух, при $2 < \frac{a}{b} \leq 2,7$ — трех выпучин и т. д. Поэтому при $\frac{a}{b} > 1,1$ точность приведенного приближенного решения резко ухудшается.

Если приближенное решение нужно получить для широкого диапазона изменения параметров пластины, то при выборе аппроксимирующих функций необходимо предусмотреть возможность качественной смены форм потери устойчивости. Например, в рассматриваемой задаче при $a > b$ можно принять

$$w(x, y) = \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \sum^N c_i v_i(x),$$

где $v_i(x)$ — собственные функции задачи устойчивости защемленного по обоим торцам стержня, сжатого одной силой P (см. гл. 3).

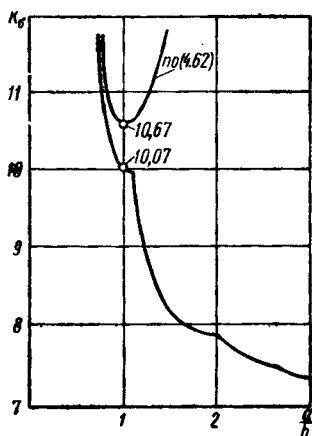


Рис. 4.16

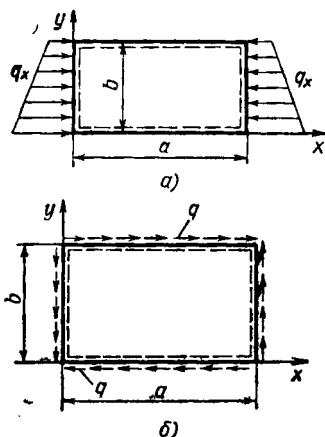


Рис. 4.17

Свободно опертая по контуру неравномерно сжатая в одном направлении прямоугольная пластина (рис. 4.17, а). При линейно изменяющихся внешних сжимающих усилиях $q_x = q \left(1 - \eta \frac{y}{b}\right)$, где η — заданный фиксированный параметр.

При этом $T_x^0 = -q \left(1 - \eta \frac{y}{b}\right)$; $T_y^0 = 0$; $S^0 = 0$.

(Заметим, что при другом нелинейном законе изменения $q_x = q_x(y)$ определение начальных внутренних усилий в срединной плоскости пластины резко усложняется.) Основное уравнение (4.57) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + q \left(1 - \eta \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.63)$$

Граничные условия задачи:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=b \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

В уравнение (4.63) коэффициенты не зависят от x , поэтому можно найти решение, удовлетворяющее граничным условиям при $x=0$ и $x=a$:

$$w_n(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} Y_n,$$

где $Y_n = Y_n(y)$ — функция координаты y . Подставив это выражение в уравнение (4.63) и сократив на $\sin \frac{n\pi x}{a}$, получим

$$D \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 Y_n - 2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n'' + Y_n^{IV} \right] - q \left(1 - \eta \frac{y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n = 0, \quad (4.64)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по y .

Учитывая граничные условия при $y=0$ и $y=b$, при решении методом Галеркина можно задать

$$Y_n = \sum_{m=1}^N c_m \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (4.65)$$

Подставив ряд (4.65) в уравнение (4.64), получим функцию-ошибку

$$L = D \sum_{m=1}^N c_m \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi y}{b} - \\ - q \left(1 - \eta \frac{y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sum_{m=1}^N c_m \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$L = \sum_{m=1}^N c_m \pi^2 \left\{ \pi^2 D \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 - \right. \\ \left. - q \left(1 - \eta \frac{y}{b} \right) \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Умножив функцию-ошибку L поочередно на все базисные функции $\sin \frac{m\pi y}{b}$, проинтегрируем от 0 до b :

$$\int_0^b \sin \frac{m\pi y}{b} L dy = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (4.66)$$

Так, ограничившись только одним членом ряда (4.65), получим одно уравнение

$$c_1 \pi^2 \frac{b}{2} \left\{ \pi^2 D \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{n}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right\} = 0,$$

из которого в первом приближении находим

$$q_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\eta}{2}}. \quad (4.67)$$

Причем входящее в эту формулу число полуволн n в продольном направлении следует подбирать из условия минимума $q_{кр}$, как это сделано выше для прямоугольной пластины, равномерно сжатой в одном направлении.

При $\eta = 0$ результат первого приближения совпадает с полученным в § 21 результатом точного решения для равномерно сжатой пластины. При малых значениях η формула первого приближения (4.67) дает удовлетворительные результаты, но с увеличением значений η ее точность резко ухудшается; так, при $\eta = 2$ формула (4.67) приводит к абсурдному результату ($q_{кр} = \infty$).

Для получения более точного решения можно учитывать два первых члена ряда (4.65); тогда система (4.66) будет состоять из двух уравнений:

$$c_1 \pi^2 \frac{b}{2} \left\{ \pi^2 D \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{n}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right\} - \\ - c_2 \frac{b}{2} \frac{16}{9} \eta q = 0; \\ - c_1 \frac{b}{2} \frac{16}{9} \eta q + c_2 \pi^2 \frac{b}{2} \left\{ \pi^2 D \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{2}{b} \right)^2 \right]^2 - \right. \\ \left. - q \left(\frac{n}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right\} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы уравнений, получаем квадратное уравнение для нахождения $q_{кр}$ во втором приближении:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{qb^2}{\pi^2 D} \right)^2 \left[n^4 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^2 - \left(\frac{16\eta}{9\pi^2} \right)^2 \right] - \frac{qb^2}{\pi^2 D} n^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \times \\ & \times \left\{ \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \left(\frac{2a}{b} \right)^2 \right]^2 \right\} + \\ & + \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \left(\frac{2a}{b} \right)^2 \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Входящее в это уравнение число полуволн в продольном направлении n для каждого значения η и отношения $\frac{a}{b}$ следует подбирать из условия минимума q .

Отметим, что при $\eta > 1$ часть пластины оказывается сжатой, а часть — растянутой. В соответствии с этим при $\eta > 1$ корни уравнения (4.68) могут иметь разные знаки. Учитывая большое число членов ряда (4.65), можно получать решение в следующих приближениях.

Окончательный результат представляют в виде

$$q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^3},$$

где K_{σ} — коэффициент, зависящий от отношения сторон $\frac{a}{b}$ и параметра η . Значения K_{σ} табулированы для всех практически интересных случаев [19, 33].

Прямоугольная пластина при сдвигающих нагрузках (рис. 4.17, б). В этом случае $T_x^0 = 0$; $T_y^0 = 0$; $S^0 = q$ и уравнение (4.57) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.69)$$

Уравнение (4.69) содержит смешанную производную $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, поэтому даже для свободно опертой по всему контуру пластины с конечным отношением сторон точное решение получить не удастся. Решение уравнения (4.69) в замкнутом виде известно только для удлиненной пластины при $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ [19]. Окончательный результат этого решения обычно записывают в такой форме:

$$q_{кр} = K_{\tau} \frac{\pi^2 D}{b^3}. \quad (4.70)$$

Причем при свободно опертых длинных краях пластины $K_{\tau} = 5,34$, а при защемленных длинных краях $K_{\tau} = 8,98$.

Рассмотрим приближенное решение для пластины с конечным отношением сторон; контур пластины считаем свободно опертым. Воспользуемся методом Галеркина; функцию поперечного прогиба примем в виде двойного ряда

$$w(x, y) = \sum \sum c_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (4.71)$$

Каждый член этого ряда, очевидно, удовлетворяет всем заданным граничным условиям задачи.

Для прямоугольной пластины с конечным отношением сторон дальнейшее решение, несмотря на принципиальную простоту, оказывается весьма громоздким, ибо точные результаты удастся получить только при учете большого числа членов ряда (4.71). Ограничимся решением в первом приближении для пластины, близкой к квадратной, т. е. при $a \approx b$. Заметим, что даже в первом приближении необходимо учитывать два члена ряда (4.71), так как взяв один член ряда, получим условие ортогональности (4.59), не содержащее внешней нагрузки q . Итак, возьмем

$$w(x, y) = c_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + c_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (4.69), найдем функцию-ошибку

$$\begin{aligned} L = & D \left\{ c_{11} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ & \left. + c_{22} \left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right\} - \\ & - q \left\{ c_{11} \frac{\pi}{a} \frac{\pi}{b} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + c_{22} \frac{2\pi}{a} \frac{2\pi}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\}. \end{aligned}$$

Условия ортогональности (4.59) приводят к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{ab}{4} c_{11} - \frac{32}{9} q c_{22} &= 0. \\ - \frac{32}{9} q c_{11} + D \left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{ab}{4} c_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Приравнявая нулю определитель этой системы уравнений, находим

$$q_{кр} = \pm \frac{9\pi^4 ab}{32} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 D$$

или для квадратной пластины при $a = b$

$$q_{кр} = \pm K_{\tau} \frac{\pi^2 D}{b^3}, \quad (4.73)$$

где $K_{\tau} = \frac{9\pi^2}{8} = 11,1$.

При этом значении q из уравнений (4.72) находим $c_{22} = \pm \frac{c_{11}}{4}$. Следовательно, форма изогнутой срединной поверхности пластины при потере устойчивости приближенно описывается функцией

$$w_{кр}(x, y) = c_{11} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \pm \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Знаки « $\pm$ », входящие в полученные выше зависимости, отражают тот очевидный факт, что изменение направления внешней контурной нагрузки не влияет на ее критическое значение. Уточненное значение коэффициента в формуле (4.73) для квадратной пластины равно $K_{\tau} = 9,34$ [19].

Учтя большее число членов ряда (4.71) и выполнив трудоемкие вычисления, можно найти значения коэффициента K_{τ} в формуле (4.73) и при других значениях отношения $\frac{a}{b}$. Аналогичные решения получены при иных закреплениях краев пластины, причем результаты этих решений табулированы [19, 33].

Методом Галеркина могут быть решены (и решены) многие другие задачи устойчивости прямоугольных и круглых пластин. Но при всех достоинствах этот метод нельзя считать универсальным методом решения задач устойчивости пластин. Основным недостатком метода Галеркина связан с необходимостью удовлетворения всех граничных условий при выборе базисных функций. Геометрические граничные условия можно выполнить сравнительно легко, но даже для пластин простой формы трудно выбрать базисные функции, удобные для математической обработки и удовлетворяющих всем силовым граничным условиям. Например, в задачах устойчивости прямоугольных пластин с одним свободным краем чрезвычайно трудно подобрать удобную систему базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям на свободном краю. Это замечание относится и к пластинам с упруго закрепленным краем или пластинам с отверстиями. Во всех такого рода задачах приближенное решение удобнее получать энергетическим методом.

Энергетический метод исследования устойчивости пластин

Теория устойчивости упругих пластин первоначально появилась в энергетическом варианте. В 1890 г. на заседании Лондонского математического общества была доложена работа Брайана «Об устойчивости пластины, нагруженной в своей плоскости», в которой впервые сформулирован и применен к решению конкретных задач энергетический критерий устойчивости пластин. С тех пор энергетический подход используют для решения разных задач устойчивости пластин (и не только пластин) при различных условиях нагружения и закрепления.

В гл. 5 изложены основы энергетического подхода к исследованию устойчивости пластин и рассмотрено использование энергетического метода для приближенного исследования поведения пластин после потери устойчивости.

§ 24. Энергетический критерий устойчивости в форме Брайана

Рассмотрим тонкую упругую пластину, нагруженную в своей плоскости (рис. 4.1). Устойчивость плоского начального состояния такой пластины исследуем с помощью энергетического критерия в форме Брайана при допущениях, которые сформулированы в § 19.

В начальном невозмущенном состоянии равновесия в срединной плоскости пластины действуют усилия $T_x^0 = T_x^0(x, y)$, $T_y^0 = T_y^0(x, y)$, $S^0 = S^0(x, y)$, которые будем считать известными. Отклонение пластины от начального состояния равновесия зададим перемещениями точек ее срединной плоскости:

$$w = \alpha w_1(x, y), \quad (5.1)$$

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат; $w_1(x, y)$ — конечная функция координат.

В соответствии с намеченной в гл. 2 общей схемой исследования устойчивости с помощью энергетического подхода подсчитаем пропорциональное α^2 изменение полной потенциальной энергии при отклонениях пластины от начального невозмущенного

состояния равновесия. Поперечные прогибы пластины w вызывают изменения кривизны и кручение ее срединной плоскости, определяемые формулами (4.11) и (4.12):

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.2)$$

Кроме того, срединная плоскость испытывает удлинения и сдвиги, пропорциональные квадратам производных поперечного прогиба и подсчитываемые по формулам

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.3)$$

На этих удлинениях и сдвигах начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 совершают работу. Дальнейшие этапы вывода аналогичны приведенным в § 9 и здесь не воспроизведены. Окончательно, опуская множитель α^2 и индекс 1, получим выражение изменения полной потенциальной энергии пластины

$$\Delta \mathcal{E} = V + \iint \left[T_x^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + S^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_y^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5.4)$$

где энергия изгиба пластины V подсчитывается по формуле

$$V = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (5.5)$$

Интегрирование в (5.4) и (5.5) производится по всей поверхности пластины.

Точки бифуркации начального состояния равновесия определяются из условия стационарности $\Delta \mathcal{E}$, т. е. из условия

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0. \quad (5.6)$$

Это условие, при котором изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ подсчитывается по зависимости (5.4), или эквивалентное ему условие $\Delta \mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимальной нагрузки будем называть **энергетическим критерием устойчивости пластин в форме Брайана**.

Условие (5.6) можно использовать как для точного решения, так и для построения приближенного решения задач устойчивости пластин.

Сначала покажем, что из этого условия следует основное линейризованное уравнение (4.33). Уравнение Эйлера для функционала (5.4) имеет вид (см. приложение II)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F_1}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F_1}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F_1}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)} = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}; \\ F_2 &= T_x^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + S^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_y^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

После дифференцирования (при $D = \text{const}$) из уравнения (5.7) следует, что

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (*) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (*).$$

Таким образом, из условия стационарности $\Delta \mathcal{L}$ можно получить однородное линейризованное уравнение (4.33), которое раньше получено из условий равновесия, составленных для искривленного элемента пластины. В частности, если пластина нагружена только контурными внешними усилиями, то начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial S^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

и уравнение (5.8) преобразуется к виду

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (5.10)$$

Условие $\delta(\Delta \mathcal{L}) = 0$ можно использовать для построения приближенного решения задач устойчивости пластин методом

Рэля—Ритца. В этом случае функцию поперечного прогиба задают, например, в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x, y), \quad (5.11)$$

где $f_i(x, y)$ — координатные функции, удовлетворяющие (каждая в отдельности) геометрическим граничным условиям задачи. Если все действующие на пластину нагрузки изменяются пропорционально параметру P , то, подставив ряд (5.11) в выражение (5.4) и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}(P, c_1, c_2, \dots, c_N). \quad (5.12)$$

Учитывая структуру выражения (5.4), нетрудно установить, что зависимость (5.12) будет квадратичной формой от N параметров c_i . Поэтому условие стационарности $\Delta \mathcal{E}$ приводит к системе N однородных линейных уравнений с неизвестными c_i :

$$\frac{\partial (\Delta \mathcal{E})}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.13)$$

Равенство нулю определителя этой последней системы уравнений дает уравнение, из которого можно найти N приближенных собственных значений параметра нагрузки P_n ; наименьшее из этих собственных значений приближенно равно $P_{кр}$.

Заметим, что при численной реализации метода Рэля—Ритца вместо условия $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ иногда удобнее воспользоваться другой эквивалентной формулировкой энергетического критерия устойчивости (см. § 9), положив $\Delta \mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании $P = P_{\min}$, где P — параметр, пропорционально которому изменяются все приложенные к пластине нагрузки. В этом случае приходим к следующему соотношению:

$$P = \frac{-V}{\iint \left[\frac{1}{2} \bar{T}_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \bar{S}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \bar{T}_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}. \quad (5.14)$$

где $\bar{T}_x^0 = \bar{T}_x^0(x, y)$, $\bar{T}_y^0 = \bar{T}_y^0(x, y)$, $\bar{S}^0 = \bar{S}^0(x, y)$ — распределение начальных усилий в срединной плоскости пластины при $P = 1$; величину V подсчитываем по формуле (5.5). Минимизируя каким-либо численным методом выражение (5.14), находим $P_{\min} = P_{кр}$.

Прежде чем привести примеры решения задач устойчивости энергетическим методом, сделаем замечания по изложенному

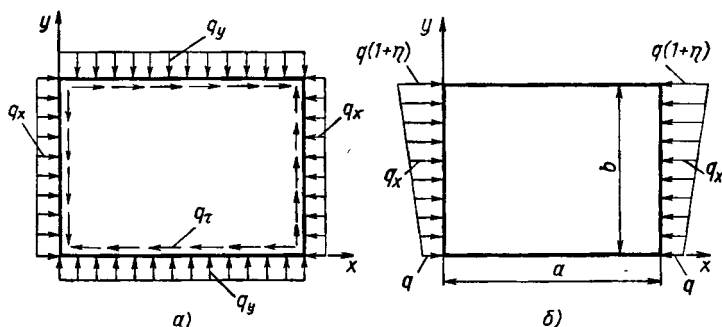


Рис. 5.1

выводу энергетического критерия Брайана. Особо необходимо подчеркнуть, что критерий Брайана выражается через начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 , которые до решения задачи устойчивости должны быть предварительно найдены из решения плоской задачи (точно или приближенно). В исключительных случаях критерий Брайана может быть записан непосредственно через внешние контурные нагрузки. Так, при однородном начальном напряженном состоянии (рис. 5.1, а) постоянные величины $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = -q_y$, $S^0 = q_\tau$ можно вынести за знак интегрирования и изменение полной потенциальной энергии подсчитывать с помощью зависимости

$$\Delta \mathcal{E} = V - \frac{1}{2} q_x \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy +$$

$$+ q_\tau \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy - \frac{1}{2} q_y \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy. \quad (5.15)$$

Для пластины (рис. 5.1, б), нагруженной изменяющимся по линейному закону погонным усилием $q_x = q \left(1 + \eta \frac{y}{b} \right)$, решение плоской задачи очевидно: $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = 0$, $S^0 = 0$. Тогда можно записать

$$\Delta \mathcal{E} = V - \frac{1}{2} \int_0^b q_x \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (5.16)$$

В общем случае величину $\Delta \mathcal{E}$ следует подсчитывать через начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 по зависимости (5.4). Например, если прямоугольная пластина с закрепленным относительно поперечных перемещений контуром сжата произвольно изменяющимся вдоль стороны пластины усилием интенсивности $q_x = q_x(y)$

(рис. 5.2, а), то использование выражений (5.15) или (5.16) при определении $q_{кр}$ может привести к сколь угодно большой ошибке. На рис. 5.2, б показана прямоугольная пластина, сжатая четырьмя сосредоточенными силами P . Если для такой пластины попытаться подсчитать изменение полной потенциальной энергии по выражению (5.15) или (5.16), то следует записать

$$\Delta \mathcal{E} = V - \frac{1}{2} P \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=0}^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=b}^2 dx.$$

При закрепленных относительно поперечного прогиба w продольных сторонах пластины два последних интеграла в этом выражении тождественно равны нулю. Тогда $\Delta \mathcal{E} = V$ при любых совместимых с граничными условиями поперечных прогибах, т. е. в данном случае выражение (5.15) приводит к абсурдному результату: нагруженная сжимающими силами пластина не может потерять устойчивость ни при каких значениях этих сил [1]. В то же время, предварительно определив T_x^0 , T_y^0 , S^0 и воспользовавшись зависимостью (5.4), получим конечное значение $P_{кр}$. Поэтому во избежание такого рода недоразумений при использовании энергетического критерия в форме Брайана целесообразно подсчитывать $\Delta \mathcal{E}$ по зависимости (5.4).

Следующее замечание связано с тем, что при выводе выражения (5.4) точкам срединной плоскости пластины сообщались только поперечные перемещения $w = \alpha w_1(x, y)$, а перемещения в плоскости пластины u и v сразу полагались тождественно равными нулю. При этом может возникнуть вопрос, не приводит ли такое ограничение перемещений точек срединной плоскости пластины к завышению критических нагрузок, т. е. не может ли пластина потерять устойчивость при перемещениях u , v , не равных нулю, раньше, чем это следует из критерия, полученного в предположении равенства их нулю.

Для ответа на этот вопрос выясним, как отразится на значении $\Delta \mathcal{E}$ введение перемещений u , v того же порядка малости, как и поперечное перемещение w . Пусть перемещения, переводящие пластину в новое состояние равновесия, смежное с начальным, заданы в виде $u = \alpha u_1(x, y)$; $v = \alpha v_1(x, y)$; $w = \alpha w_1(x, y)$,

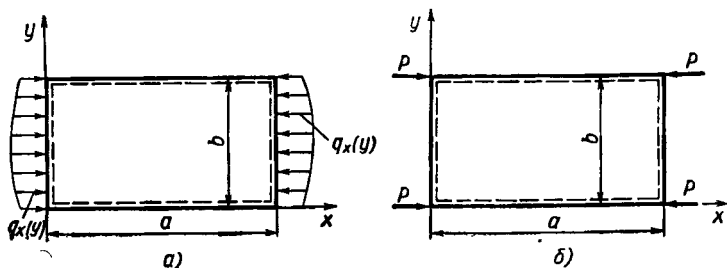


Рис. 5.2

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат.

Изменение кривизны срединной плоскости по-прежнему определяется формулами (5.2). Удлинения и сдвиги в срединной плоскости пластины следует подсчитывать не по формулам (5.3), а по формулам (4.24). Следовательно, можно записать

$$\varepsilon_x = \alpha \varepsilon'_x + \alpha^2 \varepsilon''_x; \quad \varepsilon_y = \alpha \varepsilon'_y + \alpha^2 \varepsilon''_y; \quad \gamma = \alpha \gamma' + \alpha^2 \gamma'',$$

где

$$\varepsilon'_x = -\frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon'_y = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \gamma' = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

Величины ε''_x , ε''_y , γ'' выражаются через функцию $w_1(x, y)$ по формулам (5.3).

Определив пропорциональное α^2 изменение полной потенциальной энергии, получим

$$\Delta \mathcal{E} = V + V_2 + \iint \left[\frac{1}{2} T_x^0 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + S^0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T_y^0 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где, как и ранее, величина V подсчитывается по формуле (5.5). Дополнительное слагаемое V_2 , зависящее от перемещений $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, равно

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\mu^2} \iint (\varepsilon_x'^2 + 2\mu \varepsilon_x' \varepsilon_y' + \varepsilon_y'^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma'^2) dx dy.$$

Очевидно, V_2 — величина положительно определенная, т. е. при любых не равных тождественно нулю функциях $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ всегда $V_2 > 0$. Откуда следует, что для получения минимальной критической нагрузки функции $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ необходимо положить тождественно равными нулю (перемещения пластины как жесткого целого не рассматриваем). Итак, с той же степенью точности, с которой верны формулы (4.24), можно считать, что при потере устойчивости точки срединной поверхности пластины получают только поперечные перемещения w (перемещения u, v второго порядка малости, сопутствующие потере устойчивости пластины пока не рассматриваем).

Если удлинения и углы сдвига подсчитывать не по формулам (4.24), а по общим зависимостям (2.22), то учет перемещений u_1, v_1 приведет к поправкам в значениях критических нагрузок порядка $\varepsilon_{кр}$ по сравнению с единицей (см. § 7).

Следует заметить, что вывод выражения (5.4) не зависит от причин появления начальных усилий T_x^0, T_y^0, S^0 в срединной плоскости пластины. Эти усилия могли возникнуть под действием контурных или массовых нагрузок, перепада температур, структурных превращений в материале пластины и т. д. В любом случае (после того, как начальные усилия определены) критерий

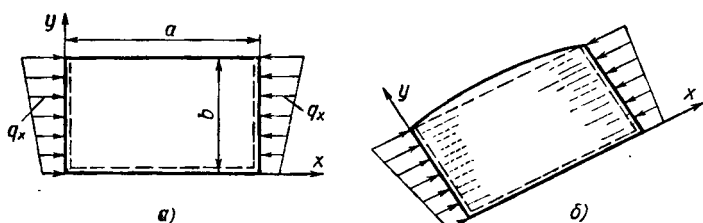


Рис. 5.3

в форме Брайана может быть использован для исследования устойчивости плоского напряженного состояния тонкой упругой пластины.

Перейдем к примерам, иллюстрирующим применение приближенного энергетического метода исследования устойчивости пластин. Рассмотрим прямоугольную пластину с одним свободным краем (рис. 5.3, а). Пусть в направлении оси x пластина сжата контурными усилиями, действующими по двум противоположным сторонам, причем

$$q_x = q \left(1 + \eta \frac{y}{b} \right),$$

где η — фиксированный параметр ($\eta \geq -1$).

Как отмечалось, при таком нагружении прямоугольной пластины решение плоской задачи очевидно: $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = 0$, $S^0 = 0$. Выражение (5.4) принимает вид

$$\Delta \mathcal{E} = V - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b q \left(1 + \eta \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

Если по трем остальным сторонам пластина свободно оперта, то функцию поперечного прогиба удобно аппроксимировать рядом

$$w(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_{i=1}^N c_i y^i.$$

Для пластин со свободным краем обнаруживается основное преимущество метода Рэлея—Ритца по сравнению с методом Галеркина: при выборе координатных функций можно не заботиться об удовлетворении силовых граничных условий на свободном краю пластины. Ограничившись одним членом ряда, находим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = c_1 y \left(\frac{n\pi}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -c_1 y \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c_1 \left(\frac{n\pi}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Подставив значения производных в выражение для $\Delta\mathcal{E}$ и выполнив несложные операции интегрирования, получим

$$\Delta\mathcal{E} = c_1^2 \frac{ab}{4} \left\{ D \left[\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2(1-\mu) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - q \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 b^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta}{4} \right) \right\}.$$

Собственные значения нагрузки равны

$$q_n = \frac{n^2 \pi^2 D}{b^2} \frac{\frac{b^2}{a^2} + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2 n^2}}{1 + \frac{3}{4} \eta}.$$

При $n = 1$ наименьшее собственное значение приближенно равно критическому

$$q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (5.17)$$

где

$$K_{\sigma} = \frac{\frac{b^2}{a^2} + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2}}{1 + \frac{3}{4} \eta}.$$

Вид пластины, потерявшей устойчивость, схематично изображен на рис. 5.3, б. В частности, при $\eta = 0$ и $\frac{b^2}{a^2} \rightarrow 0$ получим $K_{\sigma} = \frac{6(1-\mu)}{\pi^2}$, что согласуется с результатом, приведенным в § 21. Взяв большее число членов ряда, $q_{кр}$ можно определить с любой степенью точности и при других значениях параметра η и отношения сторон пластины $\frac{b}{a}$.

В качестве второго примера рассмотрим сплошную круглую пластину постоянной толщины, равномерно сжатую по контуру распределенной нагрузкой q (рис. 4.14, а); тогда очевидно $T_r^0 = -q$, $T_{\theta}^0 = -q$, $S^0 = 0$.

Исследуем осесимметричную форму потери устойчивости такой пластины. В этом случае изменение кривизны срединной плоскости определяется формулами

$$\kappa_r = \frac{d^2 w}{dr^2};$$

$$\kappa_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Удлинения и сдвиги в срединной плоскости равны:

$$\varepsilon_r'' = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta'' = 0; \quad \gamma'' = 0.$$

Выражение (5.4) принимает вид

$$\Delta \mathcal{E} = V - 2\pi \int_0^R q \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr,$$

где

$$V = 2\pi \int_0^R \frac{D}{2} \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr.$$

Если край пластины защемлен и граничные условия на нем $w(R) = 0$ и $\frac{dw(R)}{dr} = 0$, то для приближенного решения можно принять, что

$$w(r) = \frac{c_0}{4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^N c_i \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^i.$$

Если для определения критического значения $q_{кр}$ воспользоваться соотношением (5.14), которое в данной задаче имеет вид

$$q = \frac{\int_0^R D \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr}{\int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r dr}, \quad (5.18)$$

то ограничившись одним первым слагаемым, в выражении для $w_1(r)$ в случае пластины постоянной жесткости D получим

$$q_{кр} = K \frac{D}{R^2},$$

где $K = 16$. Точное значение (см. § 22) $K = 14,68$.

Учитывая большее число членов ряда и минимизируя выражение (5.18) по безразмерным параметрам $\bar{c}_i = \frac{c_i}{c_0}$, нетрудно получить результат с любой степенью точности. Значения коэффициента K , подсчитанные при различном числе членов ряда, будут следующими:

N	$\dots$	0	1	2	3	4
K	$\dots$	16	$14,70$	$14,69$	$14,68$	$14,68$

Решенная задача легко обобщается на случай пластины переменной толщины $D = D(r)$; тогда вместо соотношения (5.18) следует записать, что

$$q = \frac{\int_0^R D(r) \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr}{\int_0^R \bar{T}_r^0(r) \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r dr},$$

где $\bar{T}_r^0(r)$ — распределение начальных радиальных усилий при $q = 1$, которое необходимо предварительно определить из решения осесимметричной плоской задачи для круглой пластины переменной толщины.

§ 25. Энергетический критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко

Вернемся к общей задаче устойчивости тонкой упругой пластины (см. рис. 4.1), находящейся под действием контурных и поверхностных нагрузок в плоском начальном напряженном состоянии. Начальные внутренние усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 считаем известными. Рассмотрим возмущенное состояние пластины, смежное с начальным плоским, причем переход пластины в новое состояние зададим перемещениями точек срединной поверхности (см. § 10):

$$\begin{aligned} u &= \alpha u_1(x, y) + \alpha^2 u_2(x, y); \\ v &= \alpha v_1(x, y) + \alpha^2 v_2(x, y); \\ w &= \alpha w_1(x, y) + \alpha^2 w_2(x, y). \end{aligned} \quad (5.19)$$

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат; $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $w_1(x, y)$ и т. д. — конечные функции координат.

Изменение кривизны срединной плоскости пластины, удлинения и сдвиги в срединной плоскости подсчитаем по формулам (4.11) и (4.24):

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

В соответствии с общей схемой, уже неоднократно использованной, найдем пропорциональное α^2 изменение полной потен-

циальной энергии $\Delta\mathcal{E}$ при переходе пластины в новое состояние, смежное с исходным. Как показано в предыдущем параграфе, при потере устойчивости перемещения $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ тождественно равны нулю [введение дополнительных слагаемых в выражениях (5.19) не влияет на этот вывод]. Кроме того, как нетрудно проверить, функция $w_2(x, y)$ не войдет в выражение для $\Delta\mathcal{E}$. Поэтому при исследовании устойчивости пластины вместо общих выражений (5.19) достаточно принять, что

$$u = \alpha^2 u_2(x, y); \quad v = \alpha^2 v_2(x, y); \quad w = \alpha w_1(x, y). \quad (5.20)$$

Тогда, опустив множитель α^2 , получим

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} = & V + \iint (T_x^0 \varepsilon_x'' + T_y^0 \varepsilon_y'' + S^0 \gamma'') dx dy - \\ & - \iint (p_x u_2 + p_y v_2) dx dy - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где p_x , p_y и q_x , q_y — поверхностные и контурные нагрузки;

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy; \\ \varepsilon_x'' = & \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y'' = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma'' = & \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Покажем, что выражение (5.21) тождественно выражению (5.4) при любых совместимых со связями перемещениях $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$. Для этого в выражении (5.21) выделим все слагаемые, содержащие эти перемещения и их производные:

$$\begin{aligned} A = & \iint \left[T_x^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} S^0 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + T_y^0 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy - \\ & - \iint (p_x u_2 + p_y v_2) dx dy - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой первую вариацию полной потенциальной энергии начального напряженного состояния пластины, вычисленную в предположении, что возможные перемещения в плоскости пластины совпадают с перемещениями $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$. Поскольку начальное плоское напряженное состояние равносильно, $A = 0$ при любых совместимых со связями перемещениях $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$. Следовательно, выражение (5.21) тождественно выражению (5.4). В частности, именно поэтому при выводе выражения для $\Delta\mathcal{E}$ перемещения $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ можно положить равными нулю.

Перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ можно выбрать так, чтобы в выражении (5.21) обратить в нуль все слагаемые, содержащие начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 . Для этого с помощью соотношений упругости введем величины

$$\begin{aligned} T_x'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_x'' + \mu \epsilon_y''); \\ T_y'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_y'' + \mu \epsilon_x''); \\ S'' &= Gh\gamma'' = \frac{Eh(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \gamma''. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Тогда, выразив T_x^0 , T_y^0 , S^0 через ϵ_x'' , ϵ_y'' , γ'' , с помощью тех же соотношений упругости, можно записать

$$\begin{aligned} &\iint (T_x^0 \epsilon_x'' + S^0 \gamma'' + T_y^0 \epsilon_y'') dx dy = \\ &= \iint (T_x'' \epsilon_x^0 + S'' \gamma^0 + T_y'' \epsilon_y^0) dx dy = W. \end{aligned}$$

Начальные удлинения и сдвиги в срединной плоскости ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ^0 выразим через начальные перемещения u_0 , v_0 и получим

$$W = \iint \left[T_x'' \frac{\partial u_0}{\partial x} + S'' \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + T_y'' \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] dx dy.$$

Используя формулы Грина для интегрирования по частям, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} W = \oint (q_x'' u_0 + q_y'' v_0) ds - \iint &\left[\left(\frac{\partial T_x''}{\partial x} + \frac{\partial S''}{\partial y} \right) u_0 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial T_y''}{\partial y} + \frac{\partial S''}{\partial x} \right) v_0 \right] dx dy, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} q_x'' &= T_x'' \cos \beta + S'' \sin \beta; \\ q_y'' &= S'' \cos \beta + T_y'' \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Для того чтобы в выражении (5.21) избавиться от слагаемых, содержащих начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 , достаточно потребовать, чтобы T_x'' , T_y'' , S'' удовлетворяли уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x''}{\partial x} + \frac{\partial S''}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial T_y''}{\partial y} + \frac{\partial S''}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

При этом на контуре пластины должны выполняться условия

$$q_x'' = 0; \quad q_y'' = 0. \quad (5.25)$$

При выполнении перечисленных условий получим выражение для $\Delta\mathcal{E}$, не содержащее в явном виде начальных усилий T_x^0 , T_y^0 , S^0 :

$$\Delta\mathcal{E} = V - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds - \iint (p_x u_2 + p_y v_2) dx dy. \quad (5.26)$$

В этом выражении контурный интеграл берется по той части контура пластины, для которой заданы внешние нагрузки q_x и q_y .

Дальнейшее решение можно вести на основании условия $\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$ либо $\Delta\mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума параметра нагрузки. Эти условия эквивалентны. В случае, когда изменение полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$ подсчитывается по зависимости (5.26), указанные условия будем называть **энергетическим критерием устойчивости пластин в форме С. П. Тимошенко**.

Прежде чем изложить схему решения задач устойчивости с помощью энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко, сделаем несколько общих замечаний.

Напомним, что энергетический критерий в форме Брайана выражается через начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 , действующие в срединной плоскости пластины в докритическом напряженном состоянии, и позволяет исследовать устойчивость пластины независимо от того, какими причинами эти усилия вызваны. Энергетический критерий в форме С. П. Тимошенко не содержит начальных усилий T_x^0 , T_y^0 , S^0 и выражается непосредственно через внешние нагрузки, которые действуют на пластину. Поэтому выражение (5.4) более общее, чем выражение (5.26). Например, для решения температурной задачи устойчивости пластины применять выражение (5.26) нельзя. В этом случае необходима особая форма записи энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко (см. стр. 198).

Обратим внимание на то, что запись энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко избавляет от необходимости определять начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 , но требуется вычислить перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$, входящие в выражение (5.26). Поэтому трудно выявить преимущества той или иной формы записи энергетического критерия; иногда удобнее использовать форму Брайана, в других случаях (особенно для получения упрощенных приближенных решений) — форму С. П. Тимошенко.

Наметим путь приближенного решения задач устойчивости пластин с помощью энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко. Введем функцию усилий $\varphi_2 = \varphi_2(x, y)$ с помощью соотношений

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = T_x^0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = T_y^0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} = -S^0.$$

Используя зависимости (5.22) и выражения для ε_x^0 , ε_y^0 , γ^0 , можно получить уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_2 = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right], \quad (5.27)$$

которому должна удовлетворять введенная функция $\varphi_2(x, y)$.

Граничные условия для функции усилий φ_2 получим из условий (5.25). Для этого воспользуемся очевидными геометрическими зависимостями (см. рис. 4.1)

$$dx = -ds \sin \beta; \quad dy = ds \cos \beta.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial s} (*) = -\frac{\partial}{\partial x} (*) \sin \beta + \frac{\partial}{\partial y} (*) \cos \beta.$$

Поэтому можно записать

$$q''_x = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right); \quad q''_y = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right).$$

Граничные условия для φ_2 на контуре односвязной пластины можно представить либо в виде

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \quad (5.28)$$

либо в виде

$$\varphi_2 = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0, \quad (5.29)$$

где n — нормаль к контуру пластины.

Исходя из граничных условий, заданных относительно нормального прогиба, выберем функцию $w_1(x, y)$ в виде ряда

$$w_1(x, y) = \sum c_i f_i(x, y). \quad (5.30)$$

Это позволяет выразить правую часть уравнения (5.27) через функции $f_i(x, y)$ и коэффициенты c_i . Обратим внимание на следующее обстоятельство. При известной правой части уравнения (5.27) задача определения функции усилий $\varphi_2(x, y)$ оказывается эквивалентной обычной линейной задаче определения поперечного прогиба защемленной по контуру пластины. Действительно, уравнение (5.27) аналогично обычному уравнению изгиба пластины, если правую часть, пропорциональную гауссовой кривизне деформированной срединной поверхности пластины, рассматривать как заданную поперечную нагрузку. Граничные условия (5.29) соответствуют условиям защемления. Поэтому, пользуясь хорошо разработанными методами линейной теории изгиба пластин, с любой степенью точности функцию усилий $\varphi_2(x, y)$ можно выразить через выбранную функцию $w_1(x, y)$.

Используем соотношения упругости (5.22) и получим уравнения для определения перемещений u_2, v_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

После определения функций $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ дальнейшее решение можно вести из условия $\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$ либо $\Delta\mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума параметра нагрузки. Отметим, что для определения критических нагрузок не всегда следует находить перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ (см. § 26).

Примеры решения конкретных задач с помощью энергетического критерия С. П. Тимошенко приведены ниже, здесь отметим только один частный случай уравнений (5.27). Правая часть этого уравнения пропорциональна гауссовой кривизне деформированной срединной поверхности пластины (см. § 9):

$$K = \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}.$$

Если при потере устойчивости срединная плоскость пластины изгибается по разворачивающейся поверхности и $K = 0$, то решению уравнения (5.27) с граничными условиями (5.29) соответствуют $T_x'' = 0$, $T_y'' = 0$, $S'' = 0$.

В этом случае для определения перемещений $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ можно использовать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2; \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \tag{5.32}$$

которые получаются как частный случай уравнений (5.31).

§ 26. Формулировка критерия устойчивости через статически возможные усилия

Энергетический критерий устойчивости в форме Брайана формулируется через начальные усилия, которые действуют в упругом теле к моменту, предшествующему потере устойчивости. Однако некоторые авторы высказывали предположение, что в критерии устойчивости в форме Брайана вместо действительных начальных усилий можно использовать любую систему статически возможных начальных усилий и делали попытки построить такого рода решения.

При этом определение действительного начального напряженного состояния заменяется значительно более простой задачей подбора любого статически возможного напряженного состояния. Кроме того (в отличие от изложенного в предыдущем параграфе варианта энергетического критерия), не нужно определять дополнительные перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$. Но этот путь решения не верен*. В этом нетрудно убедиться на примере, приведенном в § 24.

* Верный путь использования статически возможных начальных усилий впервые указан Л. И. Балабухом.

Для изображенной на рис. 5.2, б пластины, нагруженной четырьмя силами P , в качестве статически возможного начального напряженного состояния можно взять $T_x^c = 0$, $T_y^c = 0$, $S^c = 0$ по всей площади пластины и $T_x^c = -\frac{P}{\delta}$ (где $\delta \rightarrow 0$) вдоль двух сторон при $y = 0$ и $y = b$. Поскольку вдоль этих сторон $w_1 = 0$, замена в выражении (5.4) начальных усилий статически возможными приводит к абсурдному результату: $P_{кр} \rightarrow \infty$. Из этого не следует, что статически возможные усилия нельзя использовать при формулировке энергетического критерия устойчивости упругих тел; более того, введение в энергетический критерий статически возможных начальных усилий (если это сделано правильно) в ряде случаев облегчает получение приближенного решения задачи.

Покажем, как можно ввести статически возможные начальные усилия в энергетический критерий устойчивости упругих пластин, сформулированный в предыдущем параграфе.

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда пластина (рис. 4.1) нагружена только контурными внешними усилиями q_x , q_y . Тогда внутренние начальные усилия удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial S^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

и подчинены граничным условиям на контуре пластины

$$\begin{aligned} T_x^0 \cos \beta + S^0 \sin \beta &= q_x; \\ S^0 \cos \beta + T_y^0 \sin \beta &= q_y. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Уравнения (5.33) позволяют ввести функцию начальных усилий φ_0 с помощью соотношений:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = T_x^0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = T_y^0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = -S^0. \quad (5.35)$$

Начальные усилия связаны зависимостями (4.3) с удлинениями и сдвигами ε_x^0 , ε_y^0 , γ^0 в срединной плоскости, которые с помощью линейных зависимостей (4.1) выражаются через производные начальных перемещений. Это позволяет свести задачу определения функции усилий φ_0 к решению бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 = 0. \quad (5.36)$$

Вместо действительных начальных усилий T_x^0, T_y^0, S^0 введем статически возможные начальные усилия T_x^c, T_y^c, S^c , удовлетворяющие уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x^c}{\partial x} + \frac{\partial S^c}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial S^c}{\partial x} + \frac{\partial T_y^c}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

и подчиненные граничным условиям задачи:

$$T_x^c \cos \beta + S^c \sin \beta = q_x; \quad (5.38)$$

$$S^c \cos \beta + T_y^c \sin \beta = q_y.$$

В отличие от действительных начальных усилий статически возможные усилия не связаны с деформациями пластины. Уравнения равновесия (5.37) позволяют ввести функцию статически возможных усилий

$$\frac{\partial^2 \Phi^c}{\partial y^2} = T_x^c; \quad \frac{\partial^2 \Phi^c}{\partial x^2} = T_y^c; \quad \frac{\partial^2 \Phi^c}{\partial x \partial y} = -S^c. \quad (5.39)$$

В отличие от функции Φ_0 функция Φ^c не удовлетворяет бигармоническому уравнению (5.36).

Для рассматриваемой задачи, когда на контуре заданы только внешние усилия q_x, q_y и отсутствуют поверхностные нагрузки p_x, p_y , выражение (5.26) принимает вид

$$\Delta \mathfrak{A} = V - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds, \quad (5.40)$$

где V — подсчитывается по формуле (5.5).

Для любой системы статически возможных усилий T_x^c, T_y^c, S^c можно записать тождество

$$\iint \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} T_x^c + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) S^c + \frac{\partial v_2}{\partial y} T_y^c \right] dx dy = \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds. \quad (5.41)$$

В справедливости этого тождества нетрудно убедиться путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \iint \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} T_x^c + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) S^c + \frac{\partial v_2}{\partial y} T_y^c \right] dx dy = \\ &= \oint [(T_x^c \cos \beta + S^c \sin \beta) u_2 + (S^c \cos \beta + T_y^c \sin \beta) v_2] ds - \\ & - \iint \left[\left(\frac{\partial T_x^c}{\partial x} + \frac{\partial S^c}{\partial y} \right) u_2 + \left(\frac{\partial T_y^c}{\partial y} + \frac{\partial S^c}{\partial x} \right) v_2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Интеграл по площади в правой части последнего равенства обращается в нуль, поскольку статически возможные усилия удовлетворяют уравнениям равновесия (5.37). Контурный интеграл преобразуется к контурному интегралу в выражении (5.41), поскольку статически возможные усилия подчинены граничным условиям задачи (5.38).

Учитывая тождество (5.41), вместо выражения (5.40) получим

$$\Delta \mathcal{E} = V - \iint \left[T_x^c \frac{\partial u_2}{\partial x} + S^c \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + T_y^c \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy. \quad (5.42)$$

Эта формула позволяет выразить энергетический критерий устойчивости $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ через статически возможные начальные усилия T_x^c , T_y^c , S^c .

На первый взгляд задача усложняется. При использовании энергетического критерия в форме Брайана предварительно нужно найти начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 и затем из условия $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ определить собственные функции задачи $w_n(x, y)$ и собственные значения параметра нагрузки.

При использовании выражения (5.42) также предварительно находим статически возможные начальные усилия T_x^c , T_y^c , S^c , затем кроме нормальных перемещений $w_1(x, y)$ определяем производные перемещений $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ входящие в (5.42). Но как следует из приведенной задачи устойчивости пластины, нагруженной сосредоточенными силами, может оказаться, что определение статически возможных начальных усилий значительно проще, чем определение действительных начальных усилий. В некоторых случаях благодаря простоте построения системы статически возможных начальных усилий решение задачи облегчается несмотря на необходимость дополнительного определения производных перемещений $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ по формулам (5.31).

Выражение (5.42) можно преобразовать к более удобному для практического использования виду. Воспользовавшись соотношениями (4.24), запишем

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = V + \iint & \left[\frac{1}{2} T_x^c \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + S^c \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{1}{2} T_y^c \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\ & - \iint (T_x^c \varepsilon_x'' + S^c \gamma'' + T_y^c \varepsilon_y'') dx dy. \end{aligned}$$

Зависимости (5.22) позволяют преобразовать последний интеграл в этом выражении:

$$\begin{aligned} \iint (T_x^c \varepsilon_x'' + S^c \gamma'' + T_y^c \varepsilon_y'') dx dy &= \frac{1}{Eh} \iint (T_x^c + T_y^c) \times \\ &\times (T_x'' + T_y'') dx dy - \frac{1+\mu}{Eh} \iint (T_x^c T_y'' - 2S^c S'' + T_y^c T_x'') dx dy. \end{aligned}$$

Используя формулы Грина, последний интеграл в правой части полученного выражения преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & \iint \left(T_x^c \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + 2S^c \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + T_y^c \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ & = \oint \left[(T_x^c \cos \beta + S^c \sin \beta) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + (T_y^c \sin \beta + S^c \cos \beta) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] ds - \\ & - \iint \left[\left(\frac{\partial T_x^c}{\partial x} + \frac{\partial S^c}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial T_y^c}{\partial y} + \frac{\partial S^c}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] dx dy, \quad (5.43) \end{aligned}$$

где введена функция усилий φ_2 , связанная с усилиями соотношениями

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = T_x^c; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial x} = T_y^c; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = -S^c.$$

Из граничных условий (5.25) следуют граничные условия для функции φ_2 (подробно см. § 25):

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Выражение (5.43) тождественно равно нулю: контурный интеграл в правой части этого выражения равен нулю в силу граничных условий, которым подчинена функция усилий φ_2 . Интеграл по площади обращается в нуль, поскольку статически возможные начальные усилия T_x^c , S^c , T_y^c удовлетворяют уравнениям равновесия (5.37).

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = & V + \iint \left[T_x^c \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + S^c \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \right. \\ & \left. + T_y^c \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{1}{Eh} \iint (T_x^c + T_y^c) (T_x^r + T_y^r) dx dy. \quad (5.44) \end{aligned}$$

Если статически возможные начальные усилия T_x^c , T_y^c , S^c совпадают с действительными начальными усилиями T_x^0 , T_y^0 , S^0 , то

$$\begin{aligned} \iint (T_x^c + T_y^c) (T_x^r + T_y^r) dx dy &= \iint (T_x^0 + T_y^0) (T_x^r + T_y^r) dx dy = \\ &= \iint \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) dx dy = \\ &= \iint (\nabla^2 \nabla^2 \varphi_0) \varphi_2 dx dy = 0, \end{aligned}$$

и выражение (5.44) переходит в выражение (5.4) энергетического критерия в форме Брайана.

§ 27. Термоупругая задача устойчивости пластин

Критерий устойчивости в форме Брайана справедлив независимо от причин появления начальных усилий T_x^0, T_y^0, S^0 . В частности, выражением (5.4) можно пользоваться и в том случае, когда эти усилия возникают в результате нагрева или заданных на контуре пластины перемещений $\tilde{u}_0$ и $\tilde{v}_0$. При этом общая схема исследования устойчивости сохраняется. Предварительно из решения плоской задачи определяют начальные усилия в срединной плоскости пластины и затем исследуют устойчивость начального напряженного состояния пластины. Но задачу устойчивости упругой пластины под действием нагрева или заданных на ее контуре начальных перемещений $\tilde{u}_0$ и $\tilde{v}_0$ можно решать, не определяя начальных усилий T_x^0, T_y^0, S^0 , а используя критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко.

Сначала преобразуем критерий в форме С. П. Тимошенко для того случая, когда на контуре пластины заданы не нагрузки, а перемещения. Рассмотрим пластину, на части контура s_1 которой заданы перемещения $u_0 = \tilde{u}_0, v_0 = \tilde{v}_0$; других внешних воздействий пластина не испытывает. Вывод выражения для изменения полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, не содержащего начальных усилий T_x^0, T_y^0, S^0 , аналогичен выводу в случае заданных внешних нагрузок. Перемещения, описывающие переход пластины в новое отклоненное от начального состояния равновесия, зададим в виде

$$u = \alpha^2 u_2(x, y);$$

$$v = \alpha^2 v_2(x, y);$$

$$w = \alpha w_1(x, y),$$

где α — бесконечно малый параметр. При этом функции $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ должны обращаться в нуль на тех участках контура пластины, для которых в явном виде заданы начальные перемещения $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0$. Тогда, вычислив изменение полной потенциальной энергии пластины, получим

$$\Delta\mathcal{E} = V + \iint (T_x^0 \epsilon_x'' + S^0 \gamma'' + T_y^0 \epsilon_y'') dx dy, \quad (5.45)$$

где V и $\epsilon_x'', \epsilon_y'', \gamma''$ определяются так же, как и в § 25.

Произвол выбора перемещений u_2, v_2 и в этом случае позволяет так распорядиться ими, чтобы избавиться от начальных усилий T_x^0, T_y^0, S^0 в выражении (5.45). Повторив все рассуждения и этапы вывода, проведенные в § 25, получим

$$\Delta\mathcal{E} = V + \oint (\tilde{u} q_x'' + \tilde{v} q_y'') ds, \quad (5.46)$$

где $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$ и $\tilde{v} = \tilde{v}(x, y)$ — заданные перемещения контура пластины. Величины $\tilde{q}_x''$ и $\tilde{q}_y''$ на контуре пластины определяются зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_x'' &= T_x'' \cos \beta + S'' \sin \beta; \\ \tilde{q}_y'' &= T_y'' \sin \beta + S'' \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

причем T_x'' , T_y'' должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x''}{\partial x} + \frac{\partial S''}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial S''}{\partial x} + \frac{\partial T_y''}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_x'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x'' + \mu \varepsilon_y''); \\ T_y'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y'' + \mu \varepsilon_x''); \\ S'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma'', \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x'' &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y'' &= \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma'' &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Напомним, что на тех участках контура пластины, для которых в явном виде заданы начальные перемещения $\tilde{u}_0(x, y)$, $\tilde{v}_0(x, y)$ перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ должны обращаться в нуль:

$$u_2(x, y) = 0; \quad v_2(x, y) = 0. \quad (5.51)$$

Как и в § 25, можно ввести функцию ϕ_2 и определить ее с учетом условий (5.51) на тех участках контура, для которых начальные перемещения заданы. Решение можно строить и иначе, используя уравнения в перемещениях.

Подставляя в уравнения (5.48) значения T_x'' , T_y'' , S'' , определяемые формулами (5.49) и используя зависимости (5.50),

получаем два уравнения, позволяющие выразить перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ через перемещение $w_1(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \\ + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \\ + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

При решении этих уравнений необходимо учитывать граничные условия (5.51) и (5.25) на соответствующих участках контура.

Потеря устойчивости упругой пластины может быть вызвана температурными напряжениями. Задачу термоупругой устойчивости рассмотрим в следующей постановке. Тонкая пластина нагревается равномерно по всей толщине $t^0 = t^0(x, y)$; механические свойства материала пластины считаем не зависящими от температуры. До потери устойчивости удлинения в срединной плоскости связаны с начальными усилиями и температурой соотношениями упругости

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{Eh} (T_x^0 - \mu T_y^0) + \alpha_t t^0; \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{Eh} (T_y^0 - \mu T_x^0) + \alpha_t t^0; \\ \gamma^0 &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} S^0, \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

где α_t — температурный коэффициент линейного расширения материала пластины; t^0 — температура, отсчитываемая от некоторой температуры $t_{нач}^0$, при которой в пластине отсутствуют температурные напряжения.

Удлинения и углы сдвига определяются по линейным формулам через производные начальных перемещений:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \quad \gamma^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}.$$

Начальные усилия удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial S^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{\partial y} = 0.$$

При заданных на контуре пластины граничных условиях относительно перемещений $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ и усилий T_x^0 , T_y^0 , S^0 , используя приведенные соотношения, можно определить начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 в срединной плоскости пластины.

Когда начальные усилия определены, при решении задачи устойчивости можно не учитывать, что они вызваны неравномерным нагревом и, подсчитывая изменение полной потенциальной энергии при отклонениях пластины от исходного состояния, использовать выражение (5.4):

$$\Delta \mathcal{E} = V + \iint \left[T_x^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + S^0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \right. \\ \left. + T_y^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Однако можно не решать термоупругую задачу и перейти к записи энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко.

Путем преобразований аналогичных тем, которые приведены в § 25, последнее выражение приводим к виду

$$\Delta \mathcal{E} = V - \iint \alpha_i t^0(x, y) (T_x'' + T_y'') dx dy = \\ = V - \iint \alpha_i t^0(x, y) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) dx dy. \quad (5.54)$$

Следует помнить, что в этом внешне простом выражении (5.54) необходимо найти значения T_x'' и T_y'' . При этом можно использовать схему решения, изложенную в § 25, либо в настоящем параграфе.

§ 28. Примеры использования энергетического критерия устойчивости

Сначала рассмотрим классическую задачу устойчивости шарнирно-опертой по всем сторонам прямоугольной пластины (при $a \approx b$), равномерно сжатой в двух направлениях. Точное решение этой задачи известно (см. § 21). При потере устойчивости поперечные перемещения пластины (с точностью до постоянного множителя) описываются функцией

$$w_1(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Критическое значение нагрузки q равно (при $a = b$)

$$q_{кр} = \frac{4}{1 + \nu} \frac{\pi^2 D}{b^3},$$

где $\nu = \frac{q_y}{q_x}$, причем $q_x = q$ и $\nu \geq 0$.

Подсчитаем изменение полной потенциальной энергии при отклонениях пластины от начального состояния равновесия с помощью выражения (5.4):

$$\Delta \mathcal{E} = V + \iint \left[\frac{1}{2} T_x^0 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + S^0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T_y^0 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где

$$V = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy.$$

При использовании критерия устойчивости в форме Брайана необходимо предварительно найти начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 , действующие в срединной плоскости пластины. В данном случае решение задачи очевидно: $T_x^0 = -q$; $T_y^0 = -\nu q$; $S^0 = 0$. Задавшись функцией поперечного прогиба

$$w_1 = c_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (5.55)$$

находим (при $D = \text{const}$)

$$V = \frac{c_1^2}{2} \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right] D.$$

Окончательно получаем

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{c_1^2}{2} \frac{ab}{4} \left\{ D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right] - q \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \right\}.$$

С учетом условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ (или $\frac{d(\Delta \mathcal{E})}{dc_1} = 0$) находим точное значение критической нагрузки, поскольку в качестве функции $w_1(x, y)$ взято точное решение задачи*.

Для сравнения решим эту задачу с помощью энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко. В этом случае $\Delta \mathcal{E}$ определяется из выражения (5.26), которое в рассматриваемой задаче при $p_x = 0$ и $p_y = 0$ принимает вид

$$\Delta \mathcal{E} = V - \oint (u_2 q_x + v_2 q_y) ds. \quad (5.56)$$

Учитывая симметрию задачи, начало координат удобнее поместить в центре пластины (рис. 5.4, а). При этом функция поперечного прогиба (5.55) запишется так:

$$w_1 = c_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (5.57)$$

* Впервые эта задача была решена таким путем в конце прошлого века Брайаном [38].

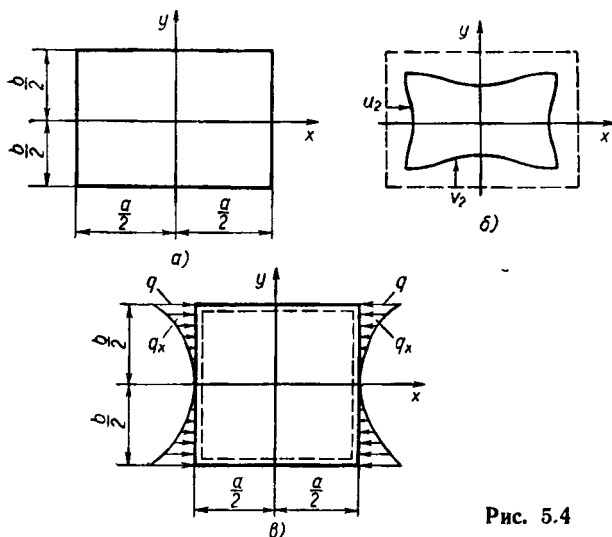


Рис. 5.4

При использовании критерия в форме С. П. Тимошенко необходимо решить вспомогательную задачу по определению перемещений $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$. Для этого сначала найдем функцию усилий $\varphi_2(x, y)$, связанную с поперечным прогибом $w_1(x, y)$ уравнением (5.27):

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_2 = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right].$$

В данном случае, когда функция $w_1(x, y)$ взята в виде (5.57), это уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_2 = c_1 Eh \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right). \quad (5.58)$$

Из граничных условий (5.29) следуют граничные условия для функции φ_2 в рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \\ \text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Уравнение (5.58) с граничными условиями (5.59) описывает поперечный изгиб защемленной по контуру прямоугольной пластины. Точное решение этого уравнения получить не удастся и поэтому проинтегрируем его приближенно по методу Галеркина. Учитывая граничные условия функцию $\varphi_2(x, y)$ зададим так:

$$\varphi_2(x, y) = f \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right). \quad (5.60)$$

Умножив согласно методу Галеркина уравнение (5.58) на выбранную функцию $\varphi_2(x, y)$ и проинтегрировав по всей площади пластины, найдем (при $a = b$)

$$f = -\frac{c_1^2 E h}{64}. \quad (5.61)$$

Для определения перемещений $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ имеем зависимости (см. § 25)

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right).$$

В силу симметрии задачи центр пластины, совмещенный с началом координат, можно считать неподвижным; тогда

$$u_2(x, y) = \int_0^x \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) \right] dx; \quad (5.62)$$

$$v_2(x, y) = \int_0^y \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] dy.$$

В выражение (5.56) входят перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ на контуре пластины. Учитывая симметрию задачи, эти перемещения достаточно определить только при $x = -\frac{a}{2}$ и $y = -\frac{b}{2}$.

При $a = b$ получим

$$\begin{aligned} u_2 \Big|_{x=-\frac{a}{2}} &= c_1^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{a}{16} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right); \\ v_2 \Big|_{y=-\frac{b}{2}} &= c_1^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{b}{16} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

На рис. 5.4, б схематично изображены перемещения u_2 , v_2 контура пластины. Следует отметить, что в углах пластины они не равны нулю.

Теперь выражение (5.56) можно записать так:

$$\Delta \mathcal{E} = V - 2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} q_x u_2 \Big|_{x=-\frac{a}{2}} dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} q_y v_2 \Big|_{y=-\frac{b}{2}} dx \right). \quad (5.64)$$

Заметим, что интегралы удвоены в силу симметрии рассматриваемой задачи. Условие $\Delta \mathcal{E} = 0$ снова приводит к точному выражению для $q_{кр}$.

Если в рассматриваемой задаче критерий устойчивости сформулируем через статически возможные начальные усилия и функцию $w_1(x, y)$ оставим в виде (5.55), то опять придем к точному значению критической нагрузки, поскольку выбранная функция является точным решением задачи.

Когда начальные усилия T_x^0, T_y^0, S^0 определяются элементарно, использование энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко связано с более громоздкими выкладками, чем критерия в форме Брайана. Но определив 1 раз перемещения $u_2(x, y), v_2(x, y)$, можно легко получить приближенное решение серии других задач устойчивости пластины, допускающих ту же аппроксимацию функции поперечного прогиба $w_1(x, y)$. Найдем, например, критическое значение нагрузки для пластины, изображенной на рис. 5.4, в. Будем считать, что контурная нагрузка изменяется по степенному закону (задача симметрична и рассмотрим только значения $q_x(y)$ при $y > 0$):

$$q_x(y) = q \left(\frac{y}{b/2} \right)^2.$$

Тогда из выражения (5.64) получим

$$\Delta \mathcal{E} = V + 4q \int_0^{b/2} \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 u_2 \Big|_{x=-\frac{a}{2}} dy.$$

Критическое значение нагрузки подсчитаем по формуле (при $a = b$)

$$q_{кр} = \frac{V}{4 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{a}{16} \int_0^{b/2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 dy}.$$

Окончательный результат представим в виде безразмерной суммарной критической силы

$$\bar{P}_{кр} = \frac{2q_{кр} \int_0^{b/2} \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 dy}{4 \frac{\pi^2}{b^2} Db}. \quad (5.65)$$

Безразмерный параметр $\bar{P}_{кр}$ показывает, во сколько раз суммарная критическая сила при $q_x = q \left(\frac{y}{b/2} \right)^2$ превосходит суммарную критическую силу при $q_y = q = \text{const}$. Несложные выкладки приводят к следующим результатам:

$\bar{P}_{кр}$	0	1	2	3	4	5
$\bar{P}_{кр}$	1	1,26	1,42	1,56	1,67	1,73

Эти результаты (за исключением $\bar{P}_{кр} = 1$ при $z = 0$) являются приближенными, поскольку функции $w_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ аппроксимировали одночленами. Если эти функции задавать в виде рядов, то решение можно получить практически с любой степенью точности, как это показано в § 25 для круглой пластины.

Заметим, что решение с использованием записи энергетического критерия устойчивости через статически возможные начальные усилия приводит к тем же значениям критических нагрузок (при тех же аппроксимирующих функциях).

В качестве следующего примера рассмотрим осесимметричную задачу устойчивости круглой пластины (рис. 4.13, а). Описывая переход пластины в смежное с исходным состояние перемещениями $w(r) = \alpha w_1(r)$; $u(r) = \alpha^2 u_2(r)$, используя формулы

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r'' &= \frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2; \\ \varepsilon_\theta'' &= \frac{u_2}{r}; \\ \gamma'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

и

$$\kappa_r' = \frac{d^2 w_1}{dr^2}, \quad \kappa_\theta' = \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr}, \quad \kappa_{r\theta}' = 0,$$

получим

$$\Delta \mathcal{E} = V - 2\pi q R u_2(R), \quad (5.67)$$

где $u_2(R)$ — радиальное перемещение на контуре пластины; V — энергия изгиба пластины, подсчитываемая по формуле

$$V = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^R D \left[\left(\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{dw_1}{dr} \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] r dr. \quad (5.68)$$

Величины T_r'' и T_θ'' связаны с ε_r'' и ε_θ'' зависимостями закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} T_r'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_r'' + \mu \varepsilon_\theta''); \\ T_\theta'' &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta'' + \mu \varepsilon_r''). \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Из условия самоуравновешенности

$$\frac{d}{dr} (r T_r'') - T_\theta'' = 0$$

вытекает уравнение, позволяющее выразить перемещение $u_2(r)$ через функцию $w_1(r)$:

$$\frac{d^3 u_2}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} - \frac{u_2}{r^2} = - \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 - \frac{dw_1}{dr} \left(\frac{d^2 w_1}{dr^2} \right).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u_2(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r} - \frac{1}{r} \int r \int \left[\frac{1-\mu}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 + \frac{dw_1}{dr} \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] dr dr, \quad (5.70)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, определяемые из граничных условий задачи. Так, для сплошной пластины перемещение в центре $u_2(0)$ должно быть ограниченным, поэтому $A_2 = 0$. В рассматриваемой задаче на контуре пластины задана внешняя нагрузка, поэтому вторым граничным условием будет $T_r'' = 0$ при $r = R$ или

$$\frac{du_2}{dr} + \mu \frac{u_2}{r} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2. \quad (5.71)$$

Если контур пластины зашпелен (при $r = R$ заданы граничные условия $w(R) = 0$ и $\frac{dw(R)}{dr} = 0$), то функцию поперечного прогиба можно задать в виде ряда

$$w_1(r) = \frac{c_0}{4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^N c_i \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^i. \quad (5.72)$$

Учитывая одно первое слагаемое и граничное условие (5.71), из выражения (5.70) находим (при $A_2 = 0$)

$$u_2(r) = \frac{c_0^2}{96} \frac{1}{R} \left[3(1-\mu) \frac{r}{R} - 6(3-\mu) \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \right. \\ \left. + 4(5-\mu) \left(\frac{r}{R} \right)^5 - (7-\mu) \left(\frac{r}{R} \right)^7 \right]. \quad (5.73)$$

В частности, при $r = R$ имеем $u_2(R) = -2 \frac{c_0^2}{96R}$. Используя выражение (5.67) из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ в первом приближении находим критическое значение нагрузки

$$q_{кр} = K \frac{D}{R^2},$$

где $K = 16$; точное значение $K = 14,68$ (см. § 24).

Учитывая большее число слагаемых, в выражении (5.72) можно получить решение практически с любой степенью точности. При этом значения коэффициента K при различном числе членов ряда совпадают с его значениями, найденными ранее другим способом.

Если сплошная круглая пластина теряет устойчивость в результате осесимметричного нагрева, то выражение (5.54) принимает вид

$$\Delta \mathcal{E} = V - 2\pi \int_0^R \alpha_t t^0 (T_r'' + T_\theta'') r dr, \quad (5.74)$$

где величина V подсчитывается по формуле (5.68); α_i — температурный коэффициент линейного расширения материала пластины; t^0 — температура пластины, отсчитываемая от той начальной температуры, при которой внутренние усилия в пластине равны нулю.

При осесимметричной форме потери устойчивости перемещение $u_2(r)$ выражается через функцию $w_1(r)$ зависимостью (5.70), но функция $u_2(r)$ должна быть подчинена не граничному условию (5.71), а граничному условию $u_2 = 0$ при $r = R$.

Учитывая формулы (5.69) и (5.66), находим

$$T_r + T_\theta = \frac{Eh}{1-\mu} \left[\frac{u_2}{r} + \frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 \right].$$

Выражение (5.74) перепишем в следующем виде:

$$\Delta \mathcal{E} = V - 2\pi \frac{Eh}{1-\mu} \int_0^R \alpha_i t^0 \left[\frac{u_2}{r} + \frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 \right] r dr. \quad (5.75)$$

Учитывая одно первое слагаемое в выражении (5.72), находим (при $A_2 = 0$)

$$u_2(r) = \frac{c_1^2}{96R} \left[(5-3\mu) \frac{r}{R} - 6(3-\mu) \left(\frac{r}{R} \right)^3 + 4(5-\mu) \left(\frac{r}{R} \right)^5 - (7-\mu) \left(\frac{r}{R} \right)^7 \right].$$

При $t^0(r) = \text{const}$ из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ получим

$$(\alpha_i t^0)_{\text{кр}} = K \frac{(1-\mu)D}{EhR^2},$$

где $K = 16$; точное значение $K = 14,68$ (см. § 22).

Увеличивая число слагаемых в выражении (5.72), можно найти значение K с любой степенью точности. Но важно подчеркнуть, что зависимость (5.75) позволяет приближенно решать задачу устойчивости не только при $t^0(r) = \text{const}$, но и при любом другом осесимметричном законе распределения температуры $t^0(r)$. При использовании зависимости (5.75) не требуется предварительно решать термоупругую задачу.

§ 29. Устойчивость пластин при локальных нагрузках

Задачи устойчивости тонких упругих пластин, нагруженных в своей плоскости локальными внешними усилиями, имеют большое практическое значение, а решение таких задач представляет несомненный методический интерес. Результаты исследования

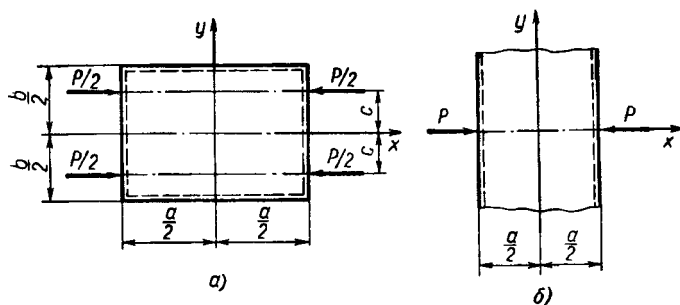


Рис. 5.5

устойчивости пластин при локальных нагрузках позволяют наиболее наглядно выявить некоторые общие особенности задач устойчивости пластин. Например, задача устойчивости прямоугольной пластины нагруженной сосредоточенными силами, использована для доказательства того, что в критерии устойчивости в форме Брайана нельзя заменять действительные начальные усилия произвольной системой статически возможных начальных усилий (см. § 26).

Прежде чем перейти к конкретным задачам, отметим, что при нагружении пластин сосредоточенными силами не очевидно существование конечных значений критических нагрузок. Действительно в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил возникают неограниченно большие напряжения, поэтому бессмысленно говорить о критических напряжениях в срединной плоскости пластины. Строго говоря, необходимо доказать, что несмотря на это потеря устойчивости пластины может произойти только при превышении внешней нагрузкой некоторого конечного критического значения. Таким доказательством является возможность записи энергетического критерия устойчивости в форме С. П. Тимошенко. При использовании энергетического критерия в такой форме задача устойчивости пластин, нагруженных сосредоточенными силами, не требует предварительного определения действительных начальных усилий. В этом случае бесконечно большие напряжения в решении не фигурируют.

В качестве примера рассмотрим решение задачи устойчивости шарнирно-опертой прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами (рис. 5,5, а). Приближенное решение задачи получим с помощью энергетического критерия устойчивости, выраженного через статически возможные начальные усилия (см. § 26). Изменение полной потенциальной энергии пластины равно

$$\Delta \mathcal{E} = V + \iint \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 T_x^c + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} S^c + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 T_y^c \right] dx dy - \frac{1}{Eh} \iint (T_x'' + T_y'') (T_x^c + T_y^c) dx dy. \quad (5.76)$$

Систему статически возможных начальных усилий T_x^c , T_y^c , S^c выберем следующим образом (при $\delta \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} T_x^c &= -\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \text{ при } (c - \delta) \leq |y| \leq (c + \delta); \\ T_x^c &= 0 \text{ при } (c - \delta) > |y| \text{ и } (c + \delta) < |y|; \\ \left. \begin{aligned} T_y^c &= 0 \\ S^c &= 0 \end{aligned} \right\} &\text{ по всей пластине.} \end{aligned} \quad (5.77)$$

При такой системе статически возможных начальных усилий из выражения (5.76) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= V + 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \left(-\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx dy - \\ &\quad - \frac{2}{Eh} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{c-\delta}^{c+\delta} (T_x'' + T_y'') \left(-\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \right) dx dy = \\ &= V - \frac{P}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{y=c}^2 dx + \frac{P}{Eh} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (T_x'' + T_y'')_{y=c} dx. \end{aligned}$$

Для дальнейшего решения возьмем функции нормального прогиба $w_1(x, y)$ и усилий $\Phi_2(x, y)$ в таком же виде, как в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе:

$$\left. \begin{aligned} w_1(x, y) &= c_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ \Phi_2(x, y) &= f \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

где для квадратной пластины при $a = b$ $f = -\frac{c_1^2}{64} Eh$. Тогда

$$\begin{aligned} (T_x'' + T_y'') &= \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{c_1^2 Eh}{16} \frac{\pi^2}{a^2} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем параграфе, при $a = b$

$$V = \frac{c_1^2}{2} \frac{ab}{4} D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{c_1^2}{2} b^2 D \left(\frac{\pi}{b} \right)^4.$$

После элементарных преобразований условие $\Delta \mathcal{E} = 0$ приводит к выражению для критической силы

$$P_{кр} = \frac{4D \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 b}{1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi c}{b}} \quad (5.79)$$

Если введем безразмерную критическую силу

$$\bar{P}_{кр} = \frac{P_{кр}}{4\pi^2 D/b},$$

то окончательно получим

$$\bar{P}_{кр} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi c}{b}}. \quad (5.80)$$

В частности, когда одна сжимающая сила P приложена по середине стороны пластины ($c = 0$), имеем $\bar{P}_{кр} = \frac{2}{3}$. Если силы $\frac{P}{2}$ приложены в углах пластины и $c = \frac{b}{2}$, то $\bar{P}_{кр} = 2$.

Нетрудно убедиться в том, что тот же результат можно получить, не вводя статически возможных начальных усилий, а определяя перемещения $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ и используя критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко, как это сделано в предыдущем параграфе. Если вместо одночленных аппроксимаций выражения для $w_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ взять в виде рядов, то окончательный результат можно получить практически с любой степенью точности как с использованием статически возможных начальных усилий, так и энергетического критерия устойчивости в форме С. П. Тимошенко.

Задача устойчивости прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами, имеет интересную многолетнюю историю. В 1906 г. А. Зоммерфельд впервые рассмотрел задачу устойчивости бесконечно длинной полосы, сжатой в своей плоскости двумя сосредоточенными силами (рис. 5.5, б). Решение этой задачи им получено путем интегрирования основного линейаризованного уравнения устойчивости пластины (4.33), причем поле действительных начальных усилий, входящих в это уравнение, не определялось, а заменялось системой статически возможных начальных усилий, выраженных формулами (5.77). В резуль-

тате для шарнирно-опертой вдоль длинных сторон полосы найдено критическое значение сжимающей силы

$$P_{кр} = \frac{4\pi D}{b}. \quad (5.81)$$

Для пластины с конечными размерами эту задачу решал С. П. Тимошенко с помощью энергетического метода [37]. Срединную плоскость пластины при потере устойчивости он считал нерастяжимой и для подсчета изменения полной потенциальной энергии пластины использовал выражение

$$\Delta \mathcal{E} = V - P \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5.82)$$

Задав функцию поперечного прогиба $w_1(x, y)$ в виде тригонометрического ряда, для шарнирно-опертой пластины С. П. Тимошенко получил формулу

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^3} \frac{\frac{b}{\pi}}{\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} - \frac{\pi a}{2b} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi a}{2b} \right)}}. \quad (5.83)$$

При $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ эта формула для критической силы сводится к выражению (5.81). Для квадратной пластины при $a = b$ из формулы (5.83) следует, что

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^3} \frac{b}{\pi} \frac{1}{0,667}.$$

Откуда для безразмерной критической силы $\bar{P}_{кр}$ получим значение

$$\bar{P}_{кр} = 0,478. \quad (5.84)$$

Как отмечал С. П. Тимошенко, используемый им прием приближенного решения этой задачи можно трактовать, как замену действительного начального напряженного состояния пластины статически возможным начальным напряженным состоянием. Действительно, выражение (5.82) получается из энергетического критерия, записанного в форме Брайана, если начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 заменить статически возможными усилиями типа (5.77).

Вслед за С. П. Тимошенко многие авторы решали аналогичные задачи устойчивости пластин, нагруженных сосредоточенными силами, не определяя действительного начального напряженного состояния, а фактически заменяя его статически возможным начальным напряженным состоянием.

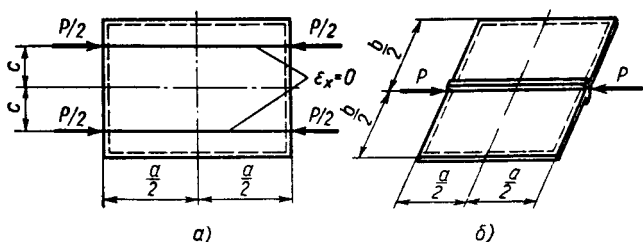


Рис. 5.6

В § 26 отмечалось, что ошибка, к которой приводит такая замена действительных начальных усилий статически возможными, может быть сколь угодно большой, причем знак этой ошибки может быть любым. Например, используя такой подход для рассмотренной выше задачи при $a = b$ (рис. 5.5, а) и ограничиваясь для $w_1(x, y)$ одночленной аппроксимацией (5.78), вместо формулы (5.80) получаем

$$\bar{P}_{кр} = \frac{1}{1 + \cos \frac{2\pi c}{b}}. \quad (5.85)$$

При $c = 0$ по этой формуле имеем $\bar{P}_{кр} = 0,5$, т. е. заниженное значение критической нагрузки. При $c = \frac{b}{2}$ эта формула приводит к $\bar{P}_{кр} = \infty$, т. е. к бесконечно завышенному значению $P_{кр}$. Уточняя решение посредством выбора функции $w_1(x, y)$ в виде ряда при $c = 0$, получим формулу (5.84), дающую более низкое значение $P_{кр} = 0,478$ по сравнению с формулой (3.85). При $c = \frac{b}{2}$ независимо от числа членов ряда имеем $\bar{P}_{кр} = \infty$.

В последние годы для квадратной шарнирно-опертой пластины, сжатой двумя сосредоточенными силами, рядом авторов получены численные решения, дающие примерно $\bar{P}_{кр} = 2/3$.

Выясним физический смысл выражения (5.82). Представим, что вдоль линии действия сосредоточенной силы пластина армирована нерастяжимой и несжимаемой нитью (рис. 5.6, а). В этом случае по выражению (5.82) действительно получим значение изменения полной потенциальной энергии при отклонениях пластины от начального плоского состояния равновесия. Причем, как это следует из приведенных выше значений $P_{кр}$, критическая нагрузка пластины, армированной нерастяжимыми нитями, оказывается меньше, чем неармированной*.

* В связи с этим необходимо отметить, что известное положение, согласно которому всякое увеличение жесткости упругой системы либо повышает, либо не меняет частот собственных колебаний, справедливо только для ненагруженных систем. Так, в рассмотренном примере частота поперечных колебаний нагруженной сосредоточенными силами пластины с жесткой нитью может быть меньше частоты колебаний такой же пластины без нити.

В реальных конструкциях тонкие пластины обычно подкрепляют ребрами жесткости (рис. 5.6, б). В этом случае часть сжимающей нагрузки воспринимает пластина, а часть — ребро жесткости. Рассмотрим два предельных случая: 1) вся сжимающая нагрузка передается через ребро жесткости; 2) вся нагрузка воспринимается пластиной. В первом случае критическая сила определяется по формуле

$$P_{кр} = \frac{V + \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{+a/2} EJ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)_{y=0}^2 dx}{\frac{1}{2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{y=0}^2 dx},$$

во втором — по формуле

$$P_{кр} = \frac{V + \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{+a/2} EJ \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{y=0}^2 dx}{\frac{1}{2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{y=0}^2 dx - \frac{1}{Eh} \int_{-a/2}^{+a/2} (T'_x + T'_y)_{y=0} dx},$$

где EJ — изгибная жесткость подкрепляющего ребра в плоскости, перпендикулярной срединной плоскости пластины.

Если ограничиться одночленным приближением (5.78), то для шарнирно-опертой пластины получим, что во втором случае критическая сила в 1,5 раза больше, чем в первом. При уточнении решения несколько изменяется количественная оценка, но качественная сохраняется: при прочих равных условиях ребро, обладающее меньшей жесткостью на сжатие, будет эффективнее, чем ребро, имеющее большую жесткость на продольное сжатие.

§ 30. Закритическое поведение пластин

С помощью линеаризованных уравнений и энергетического критерия исследуют устойчивость плоского напряженного состояния тонких упругих пластин. Но ни линеаризованные уравнения, ни энергетический критерий устойчивости (в какой бы форме он не был записан) не дают непосредственной информации о том, как будет деформироваться пластина после потери устойчивости. Для описания закритического деформирования необходимо решить задачу изгиба пластины в нелинейной постановке.

Как и для сжатого стержня (см. § 17), для пластины возможны два основных качественно различных случая закритического поведения. Если закрепления контура пластины не препятствуют ее чисто изгибной деформации, т. е. деформации без удлинений и сдвигов срединной плоскости (рис. 5.7, а), то после потери

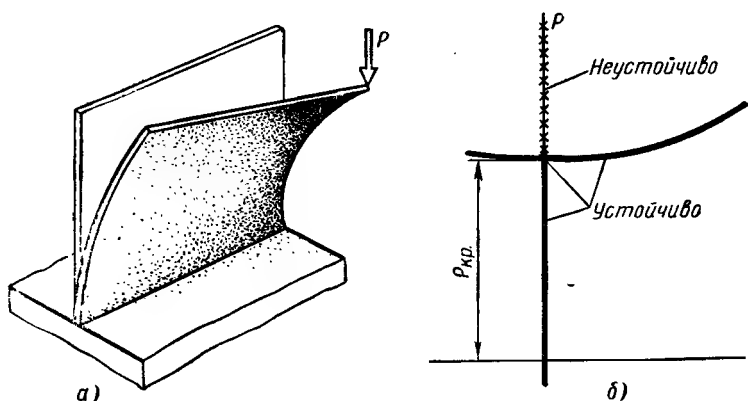


Рис. 5.7

устойчивости поведение пластины будет таким же, как и поведение стержня с незакрепленными относительно продольных смещений торцами. Критическая точка бифуркации A_1 будет точкой бифуркации первого типа (рис. 5.7, б). После потери устойчивости происходит такой быстрый рост поперечных прогибов и изгибных напряжений, что потерю устойчивости пластины практически можно считать потерей ее несущей способности. Количественные оценки прогибов и напряжений при закритическом деформировании пластины можно получить таким же путем, каким это сделано для стержня. Но если для стержней этот случай закритического поведения основной, то для тонкой пластины, являющейся элементом силовой конструкции, этот случай — исключительный.

Как неоднократно отмечалось, пластина с закрепленным относительно поперечных перемещений контуром не может изгибаться без удлинений и сдвигов срединной плоскости. В этом случае закритическое поведение пластины будет качественно отличным от рассмотренного. Как и в случае стержня с закрепленными относительно продольных перемещений торцами, после потери устойчивости такая пластина может продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

На рис. 5.8, а изображена тонкая пластина, скрепленная по контуру с жесткой шарнирной рамкой. До потери устойчивости такая пластина будет находиться в состоянии чистого сдвига. После потери устойчивости (см. § 23) на ее поверхности образуются наклонные волны. При этом пластина не теряет несущей способности и продолжает воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку. Аналогично ведет себя закрепленная по контуру прямоугольная пластина при сжатии (рис. 5.8, б): после потери устойчивости она продолжает воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

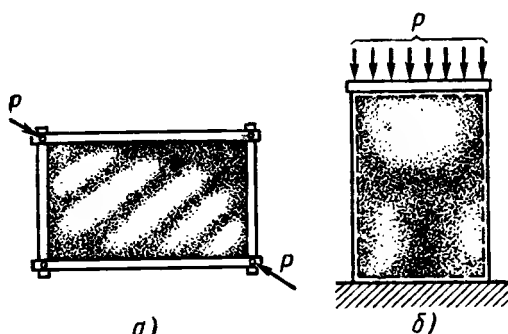


Рис. 5.8

Исследуем подробнее этот основной для тонких пластин случай закритического деформирования, когда изгиб пластины сопровождается дополнительными удлинениями и сдвигами срединной плоскости.

Характер критической точки бифуркации и закритическое поведение пластины при конечных, но малых отклонениях от

начального плоского состояния равновесия можно установить с помощью приема, применявшегося при изучении закритических деформаций стержней (см. § 17).

Будем считать, что задача устойчивости пластины решена энергетическим методом с использованием энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко, и найдены соответствующие критической точке бифуркации функции $w_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$, удовлетворяющие всем необходимым граничным условиям задачи. Приближенно примем, что при малых, но конечных отклонениях пластины ее напряженно-деформированное состояние описывается функциями

$$w(x, y) = c_1 w_1(x, y);$$

$$\varphi(x, y) = c_1^2 \varphi_2(x, y);$$

$$u(x, y) = c_1^2 u_2(x, y);$$

$$v(x, y) = c_1^2 v_2(x, y),$$

где c_1 — параметр, зависящий от уровня нагружения пластины.

Тогда изменение полной потенциальной энергии пластины при отклонениях от начального плоского состояния равновесия будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = c_1^2 \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \\ - c_1^2 \left[\iint (p_x u_2 + p_y v_2) dx dy + \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds \right] + c_1^4 W_4, \end{aligned} \quad (5.86)$$

где $\mathcal{E}_0$ — полная потенциальная энергия пластины, не зависящая от параметра c_1 .

Значение W_4 можно подсчитать с помощью либо выражения

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_x'' + 2\mu \varepsilon_x'' \varepsilon_y'' + \varepsilon_y'' + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}'' \right) dx dy, \quad (5.87)$$

либо выражения

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{Eh} (T_x'' - 2\mu T_x'' T_y'' + T_y'' + 2(1+\mu) S''^2) dx dy. \quad (5.88)$$

В этих выражениях

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x'' &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y'' &= \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma'' &= \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

$$T_x'' = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}; \quad T_y'' = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}; \quad S'' = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}. \quad (5.90)$$

Начальные усилия T_x^0, T_y^0, S^0 в срединной плоскости пластины не входят в слагаемые полной потенциальной энергии, зависящие от параметра c_1 : именно от этих условий выше определены функции v_2 и u_2 .

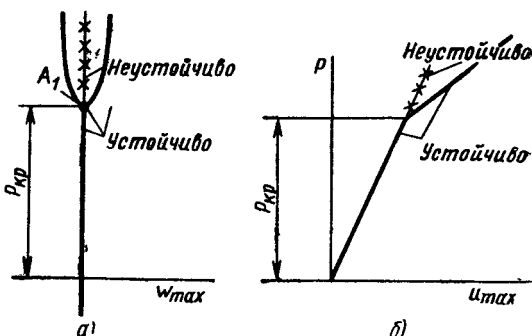
Поскольку в зависимости (5.86) все функции $w_1(x, y), u_2(x, y), v_2(x, y), \varphi_2(x, y)$ считаем известными из решения линейной задачи устойчивости пластины, закритическое деформирование пластины в окрестностях критической точки бифуркации определяется только параметром c_1 . Таким образом, с помощью приближенного решения задача исследования закритического поведения пластины сводится к элементарной нелинейной задаче для системы с одной степенью свободы (см. гл. 1).

Величина W_4 является положительно определенной, т. е. $W_4 > 0$ при любых способах закрепления и нагружения пластины. Поэтому критическая точка A_1 будет точкой бифуркации первого типа (рис. 5.9, а).

Зависимость между параметром c_1 и нагрузкой при конечных отклонениях пластины найдем из условия стационарности полной потенциальной энергии. Приравняв нулю производную выражения (5.86) по c_1 получим уравнение

$$c_1 [P_{кр} - P] + 4c_1^3 W_4 / B = 0,$$

$$(5.91) \quad \text{Рис. 5.9}$$



где

$$B = 2 \left[\iint (\bar{p}_x u_2 + \bar{p}_y v_2) dx dy + \oint (\bar{q}_x u_2 + \bar{q}_y v_2) ds \right] \quad (5.92)$$

$$P_{кр} = \frac{\iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy}{B}. \quad (5.93)$$

Здесь $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$, $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ — распределение внешних нагрузок при $P = 1$.

Из уравнения (5.91) при $c_1 \rightarrow 0$ получим критическое значение параметра нагрузки $P_{кр}$, поскольку для построения приближенного нелинейного решения использовано решение линейной задачи устойчивости пластины. При $c_1 \neq 0$ из уравнения (5.91) следует, что

$$c_1 = \frac{K}{2} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{кр}}}, \quad (5.94)$$

где $\Delta P = P - P_{кр}$ и $K = \sqrt{\frac{2V_1}{W_4}}$, причем

$$V_1 = \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy.$$

Определив параметр c_1 , нетрудно вычислить перемещения и изгибные напряжения в любой точке пластины. Например, в соответствии с зависимостями (5.86) перемещение $u_{\max}$ пластины при $\frac{\Delta P}{P_{кр}} \ll 1$ линейно изменяется с ростом внешней нагрузки (рис. 5.9, б). Зависимость между амплитудой поперечного прогиба $w_{\max}$ и внешней нагрузкой можно изобразить в виде квадратичной параболы (рис. 5.9, а)

Для уточненного определения напряжений и деформации в срединной плоскости пластины после потери устойчивости необходимо решить систему нелинейных уравнений Кармана

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \\ D \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.95)$$

где функция усилий φ связана с усилиями в срединной плоскости пластины соотношениями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = T_x; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = T_y; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -S. \quad (5.96)$$

Систему уравнений Кармана можно получить с помощью приведенных в § 19 геометрически нелинейных зависимостей для ϵ_x , ϵ_y , γ , если поперечный прогиб пластины w считать малой, но конечной величиной [12, 19]. Для решения системы уравнений (5.95) должны быть заданы граничные условия относительно поперечного прогиба w , усилий и перемещений в срединной плоскости пластины (подробнее см. [12]). Систему уравнений Кармана для практически интересных случаев удастся проинтегрировать только приближенным методом; результаты таких решений можно найти в работах [19, 33].

Тонкие упругие пластины имеют критические точки бифуркации первого типа, и начальные геометрические неправильности влияют на их поведение подобно тому, как это изображено на рис. 1.12, б.

Устойчивость цилиндрических оболочек

Среди задач устойчивости тонких упругих оболочек задачи устойчивости цилиндрических оболочек имеют наибольшее практическое значение. С другой стороны, на примере исследования устойчивости цилиндрических оболочек можно проследить все основные особенности задач устойчивости тонких оболочек. Поэтому мы ограничимся изложением основ теории устойчивости упругих оболочек применительно к задачам устойчивости круговых цилиндрических оболочек.

Из методических соображений, прежде чем перейти к исследованию устойчивости цилиндрической оболочки, детально рассмотрена родственная задача устойчивости упругого кругового кольца. Затем дан вывод основного линеаризованного уравнения круговой цилиндрической оболочки, находящейся в неоднородном безмоментном докритическом состоянии, и получено выражение для подсчета изменения полной потенциальной энергии такой оболочки. Приведены решения только двух задач устойчивости оболочки: при равномерном внешнем давлении и равномерном осевом сжатии. Многочисленные решения других задач устойчивости оболочек получены приближенными методами [7, 9, 19, 22, 27].

§ 31. Устойчивость кругового кольца

Рассмотрим круговое кольцо радиуса R , равномерно сжатое распределенной радиальной нагрузкой q (рис. 6.1). При достаточно большой внешней нагрузке q круговая форма кольца может стать неустойчивой. Тогда кольцо изогнется и примет новую некруговую форму, например показанную на рис. 6.1 штриховой линией. (Пространственные формы равновесия кольца не будем рассматривать, а ограничимся изучением потери устойчивости кольца в своей плоскости.)

Прежде чем решить задачу об устойчивости кольца, рассмотрим вспомогательную задачу об изгибе тонкого кругового кольца, нагруженного в своей плоскости переменными радиальными и касательными усилиями $q_z = q_z(\varphi)$ и $q_y = q_y(\varphi)$, приложенными вдоль оси кольца, и распределенным изгибающим моментом $m =$

$= m(\varphi)$ (рис. 6.2, а). Изгиб кольца сопровождается возникновением внутренних нормальных и поперечных усилий $N = N(\varphi)$ и $Q = Q(\varphi)$ и изгибающего момента $M = M(\varphi)$. Условия равновесия элемента кольца рассмотрим в обычной линейной постановке, не учитывая деформаций кольца (рис. 6.2, б).

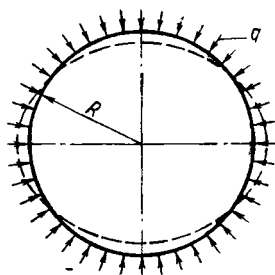


Рис. 6.1

Спроектировав все приложенные к элементу AB усилия на направление касательной и нормали к оси кольца в точке A и приравняв нулю сумму всех действующих на элемент моментов относительно точки A , получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Q - \frac{dN}{d\varphi} &= Rq_y; \\ \frac{dQ}{d\varphi} + N &= Rq_z; \\ \frac{dM}{d\varphi} - QR &= Rm. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Исключив из этих уравнений N и Q , можно получить одно уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{d^3 M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = R^3 \left[\frac{dq_z}{d\varphi} + q_y + \frac{1}{R} \left(m + \frac{d^2 m}{d\varphi^2} \right) \right]. \quad (6.2)$$

Рассмотрим деформацию кольца в своей плоскости. На рис. 6.2, в изображен элемент AB , переходящий в результате изгиба кольца в положение $A_1 B_1$. Радиальные и касательные перемещения точек оси кольца обозначим через w и v , а угол поворота касательной к оси кольца — через ϑ . До деформации кривизна

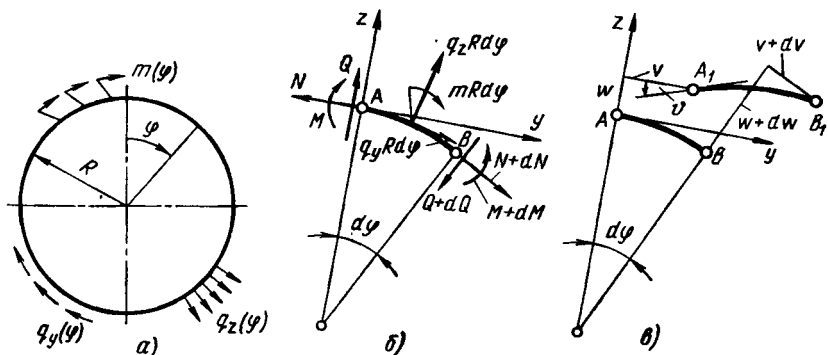


Рис. 6.2

кольца равна $\frac{1}{R}$. Изменение кривизны оси кольца κ при деформации равно изменению угла ϑ по дуге кольца, т. е.

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{Rd\varphi}.$$

Введем подвижную ортогональную систему координат и направим ось y по касательной к оси кольца в точке A , а ось z — по нормали к оси кольца, как показано на рис. 6.2, в.

В этой системе координат точки A, B, A_1, B_1 будут (с точностью до величин высшего порядка малости) иметь следующие координаты:

Координата	A	B	A_1	B_1
y	0	$Rd\varphi$	v	$Rd\varphi + v + dv + w d\varphi$
z	0	0	w	$-v d\varphi + w + dw$

Длину элемента A_1B_1 подсчитаем по формуле

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= \sqrt{(y_{B_1} - y_{A_1})^2 + (z_{B_1} - z_{A_1})^2} = \\ &= R \sqrt{\left[1 + \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right)\right]^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v\right)^2} d\varphi, \end{aligned}$$

где $y_{B_1}, y_{A_1}, z_{B_1}, z_{A_1}$ — координаты соответствующих точек. Удлинение элемента AB

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \\ &= \sqrt{\left[1 + \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right)\right]^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v\right)^2} - 1 = \\ &= \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Если ограничимся линейными относительно перемещений слагаемыми, то получим

$$\epsilon = \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right).$$

Удлинение $\epsilon \ll 1$; тогда угол поворота касательной ϑ и изменение кривизны κ можно определять без учета влияния удлинений ϵ . Проекция элемента A_1B_1 на ось z с точностью до величин высших порядков малости равна $A_1B_1 \vartheta = Rd\varphi \vartheta$. В то же время

эта проекция равна разности соответствующих координат точек B_1 и A_1 . Следовательно,

$$\vartheta = \frac{z_{B_1} - z_{A_1}}{R d\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right).$$

Итак, можно записать следующие выражения, описывающие геометрию деформации кольца в его плоскости:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi} \right); \\ \vartheta &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right); \\ \kappa &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{dv}{d\varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Если пренебречь влиянием растяжения оси кольца, т. е. положить $\varepsilon = 0$, то изменение кривизны кольца можно подсчитывать по любой из следующих зависимостей [29]:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{dv}{d\varphi} \right); \\ \kappa &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right); \\ \kappa &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Изгибающий момент M в тонком упругом кольце связан с изменением кривизны κ соотношением упругости $M = EJ\kappa$, где EJ — изгибная жесткость кольца в его плоскости.

Используя вышеприведенные зависимости, уравнение (6.2) можно преобразовать к виду

$$\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^4 \vartheta}{d\varphi^4} + \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} \right) = \frac{dq_z}{d\varphi} + q_y + \frac{1}{R} \left(m + \frac{d^2 m}{d\varphi^2} \right) \quad (6.5)$$

или

$$\frac{EJ}{R^4} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v \right) = - \left[\frac{dq_z}{d\varphi} + q_y + \frac{1}{R} \left(m + \frac{d^2 m}{d\varphi^2} \right) \right]. \quad (6.6)$$

При заданных внешних нагрузках решение этих уравнений дает возможность определить внутренние силовые факторы и перемещения кольца. Отметим, что если ось кольца считать нерастяжимой, т. е. положить $\varepsilon = 0$, то связь между перемещениями v и w определяется зависимостью

$$w = - \frac{dv}{d\varphi}. \quad (6.7)$$

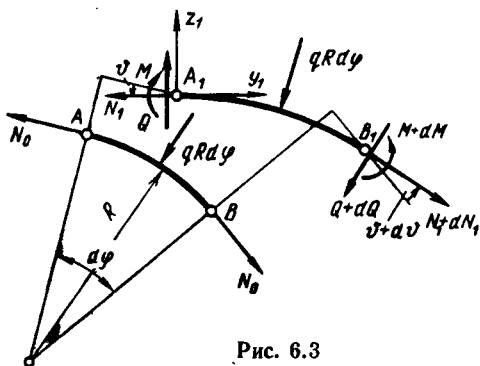


Рис. 6.3

Вернемся к задаче устойчивости кольца, нагруженного равномерным радиальным усилием интенсивностью q . Устойчивость такого кольца исследуем при допущениях, аналогичных допущениям, использованным при исследовании устойчивости прямых стержней (см. § 13).

1. Кольцо имеет идеально правильную круговую форму и интенсивность рас-

пределенной внешней нагрузки строго постоянна по всему кольцу.

2. Изменением всех геометрических размеров кольца в докритическом состоянии можно пренебречь.

3. При потере устойчивости связь между изгибающим моментом и изменением кривизны оси кольца описывается соотношением, основанным на гипотезе плоских сечений, т. е. $M = EJ\kappa$.

4. Внешняя нагрузка гидростатическая, т. е. при деформации кольца нагрузка остается направленной по нормали к деформированной оси кольца, а ее интенсивность q не меняется.

В силу первого допущения возможна круговая форма равновесия кольца, при которой $N_0 = -qR$. Выясним, при каких условиях становятся возможными изгибные формы равновесия кольца, смежные с исходной круговой формой. Для этого составим линейаризованные уравнения равновесия элемента кольца в состоянии, отклоненном от исходного. При отклонениях кольца от исходной круговой формы в нем кроме нормального усилия N_1 возникнут перерезывающие усилие Q и изгибающий момент M .

Все действующие на элемент силы спроектируем на оси y_1 и z_1 , направленные по касательной и по нормали к деформированному кольцу в точке A_1 (рис. 6.3). Учитывая, что касательная в точке B_1 составляет с осью y_1 угол $(d\varphi + d\vartheta)$ и, отбрасывая величины высших порядков малости, получим (см. § 13, вывод уравнений для прямого стержня):

$$\frac{dN_1}{d\varphi} - Q + Q \frac{d\vartheta}{d\varphi} = 0;$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N_1 - N_1 \frac{d\vartheta}{d\varphi} = -qR.$$

Третье уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dM}{Rd\varphi} - Q = 0.$$

Поскольку при потере устойчивости $M = EJ\kappa$, момент M и поперечная сила Q — величины того же порядка малости, что и угол поворота касательной ϑ . Поэтому в соответствии с основной идеей линеаризации третье слагаемое в первом уравнении равновесия следует отбросить, как содержащее произведение двух величин первого порядка малости.

Нормальное усилие в искривленном кольце представим в виде суммы $N_1 = N_0 + N$. Тогда второе уравнение равновесия можно записать так:

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N_0 + N - \frac{d\vartheta}{d\varphi} N_0 - \frac{d\vartheta}{d\varphi} N = -qR.$$

Но поскольку $\frac{dN_0}{d\varphi} = 0$, согласно первому уравнению дополнительное усилие N имеет тот же порядок малости, что и Q . Поэтому слагаемое $N \frac{d\vartheta}{d\varphi}$ в последнем уравнении тоже следует отбросить. Приняв во внимание, что $N_0 = -qR$, окончательно выпишем три линеаризованных уравнения равновесия элемента деформированного кольца:

$$\begin{aligned} Q - \frac{dN}{d\varphi} &= 0; \\ \frac{dQ}{d\varphi} + N &= N_0 \frac{d\vartheta}{d\varphi}; \\ \frac{dM}{d\varphi} - Q &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Сравнивая полученную систему линеаризованных уравнений с системой уравнений (6.1) линейной задачи изгиба кольца, видим, что эти системы уравнений будут формально совпадать, если в (6.1) положить $q_y = 0$, $m = 0$, а в (6.8) ввести фиктивную поперечную нагрузку $q_z^\Phi = \frac{N_0 d\vartheta}{R d\varphi}$ (см. § 20). Поэтому, минуя промежуточные выкладки, по аналогии с уравнениями (6.5) и (6.6) можно записать линеаризованное уравнение задач устойчивости кольца

$$\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^4 \vartheta}{d\varphi^4} + \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} \right) = \frac{dq_z^\Phi}{d\varphi},$$

или

$$\frac{EJ}{R^4} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + 2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v \right) = - \frac{dq_z^\Phi}{d\varphi}.$$

С учетом того, что $N_0 = -qR$ и $\vartheta = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v \right)$, окончательно получим однородное уравнение

$$\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^4 \vartheta}{d\varphi^4} + \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} \right) + q \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} = 0 \quad (6.9)$$

или

$$\frac{EJ}{I_1 R^3} \frac{d^3}{d\varphi^3} \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + v \right) + q \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right) = 0. \quad (6.10)$$

Таким образом, задача определения условий существования изгибных форм равновесия (смежных с исходной круговой) кругового кольца, находящегося под действием равномерной гидростатической нагрузки, свелась к типичной задаче на собственные значения.

В рассматриваемой задаче, когда на кольцо, сжатое равномерно распределенной гидростатической нагрузкой, не наложены дополнительные связи, в решении удобнее использовать уравнение (6.9), имеющие более низкий (четвертый) порядок. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^4 \vartheta}{d\varphi^4} + k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} = 0, \quad (6.9')$$

где

$$k^2 = 1 + \frac{qR^3}{EJ}.$$

Решение такого уравнения, совпадающего по форме с уравнением устойчивости однопролетного стержня (см. § 13), имеет вид

$$\vartheta = C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi + C_3 \varphi + C_4. \quad (6.11)$$

Для замкнутого кольца начало отсчета φ можно выбрать так, чтобы $\vartheta(0) = 0$. В этом случае необходимо положить $C_3 = -C_4$. Из условия периодичности решения, которое должно соблюдаться для замкнутого кольца, следует, что $C_3 = 0$ и $k = n$, где n — любое целое число. Кроме того, для кольца с нерастяжимой осью выполняются зависимости

$$\vartheta = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v \right); \quad \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right).$$

Поэтому, используя решение (6.11), можно записать еще два уравнения:

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = -R(C_1 \sin n\varphi - C_4 \cos n\varphi + C_4);$$

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = R(C_1 n \cos n\varphi + C_4 n \sin n\varphi).$$

Исключив решение $v = -RC_4$, соответствующее вращению кольца как жесткого целого, положим $C_4 = 0$. Исключив решения для $n = 1$,

$$v = A \sin \varphi + B \cos \varphi; \quad w = A \cos \varphi - B \sin \varphi,$$

соответствующие смещения кольца как жесткого целого, получим следующую систему собственных функций:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \sin n\varphi; \\ v &= \frac{R}{n^2 - 1} \sin n\varphi \quad (n = 2, 3, \dots); \\ w &= -\frac{nR}{n^2 - 1} \cos n\varphi\end{aligned}\quad (6.12)$$

и соответствующие им собственные значения q -

$$q_n = \frac{(n^2 - 1) EJ}{R^3}. \quad (6.12')$$

На рис. 6.4 показан вид кольца при двух значениях числа волн в окружном направлении n . Значение $n = 1$, очевидно, соответствует перемещению кольца как жесткого целого (рис. 6.4, а); $q_1 = 0$ для рассматриваемой задачи не представляет интереса. Наименьшее собственное значение, равное критической нагрузке, соответствует $n = 2$:

$$q_{кр} = q_2 = \frac{(2^2 - 1) EJ}{R^3} = \frac{3EJ}{R^3}. \quad (6.13)$$

Соответствующая этому значению форма потери устойчивости кольца показана на рис. 6.4, б.

Итак, найдена критическая нагрузка $q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}$ и с точностью до общего множителя функции, описывающие деформацию кольца в момент потери устойчивости:

$$\vartheta_{кр} = \sin 2\varphi, v_{кр} = \frac{R}{3} \sin 2\varphi, w_{кр} = -\frac{2R}{3} \cos 2\varphi.$$

В соответствии с четвертым допущением действующая на кольцо распределенная нагрузка считается гидростатической. Но возможен иной характер поведения внешней нагрузки при деформации кольца.

Рассмотрим случай, когда распределенная нагрузка при деформациях кольца остается направленной к центру кольца, причем ее интенсивность q не изменяется. (Такое нагружение может быть достигнуто, например, с помощью большого числа независимых натянутых нитей, сходящихся в центре кольца.) Если нагрузка остается направленной к центру кольца (рис. 6.5, а),

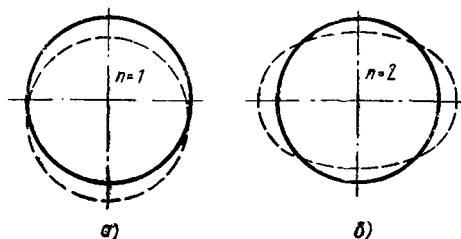


Рис. 6.4

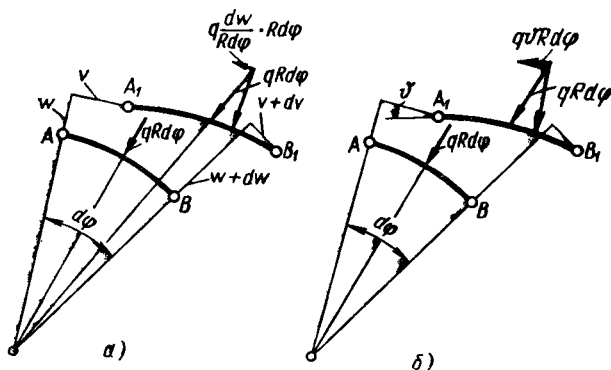


Рис. 6.5

то в линейризованные уравнения кроме фиктивной нормальной нагрузки $q_z^\Phi = -q \frac{d\vartheta}{d\varphi}$ войдет касательная нагрузка $q_y^\Phi = -\frac{1}{R} q \times \frac{dw}{d\varphi}$. Тогда, используя условие нерастяжимости кольца $w = -\frac{dv}{d\varphi}$, из уравнения (6.6) можно получить однородное уравнение

$$\frac{EJ}{R^3} \frac{d^3}{d\varphi^3} \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v \right) + q \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) + q \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0.$$

Откуда получим решение в виде $v = c \sin n\varphi$. Тогда

$$q_n = \frac{EJ}{R^3} \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 - 2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

При $n = 2$ критическое значение нагрузки $q_{кр} = \frac{9}{2} \frac{EJ}{R^3}$. Если же считать, что при деформациях кольца внешняя нагрузка в каждой точке сохраняет свое первоначальное направление (рис. 6.5, б), то следует положить $q_z^\Phi = \frac{N_0}{R} \frac{d\vartheta}{d\varphi}$ и $q_y^\Phi = -q\vartheta$.

Тогда вместо уравнения (6.9) получим

$$\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^4 \vartheta}{d\varphi^4} + \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} \right) + q \left(\frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} + \vartheta \right) = 0.$$

Найдем решение в виде $\vartheta = c \sin n\varphi$ и получим

$$q_n = \frac{n^2 EJ}{R^3} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

При $n = 2$ критическое значение нагрузки $q_{кр} = \frac{4EJ}{R^3}$. Возможны и другие случаи поведения нагрузки при деформациях кольца [39].

Теперь задачу устойчивости кругового кольца, находящегося под действием гидростатической внешней нагрузки, решим энергетическим методом (см. гл. 2). Для этого необходимо вычислить изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ при переходе системы из начального состояния равновесия в смежное отклоненное состояние. Причем значение $\Delta \mathcal{E}$ должно быть вычислено с точностью до квадратов бифуркационных перемещений первого порядка малости.

Определим деформации кольца с точностью до квадратичных слагаемых. Рассматривая перемещения элемента кольца (рис. 6.2, а) и используя таблицу координат точек A, B, A_1, B_1 , нетрудно получить выражения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right)^2; \\ \vartheta &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right); \\ \kappa &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{dv}{d\varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Подчеркнем, что квадратичные слагаемые вошли только в выражение для удлинения ε . Выражения для угла поворота касательной к оси кольца ϑ и изменения кривизны кольца κ квадратичных слагаемых не содержат. Поэтому, в частности, если $\varepsilon \ll 1$, то и при определении деформаций кольца в квадратичном приближении остаются справедливыми формулы (6.4).

При гидростатической внешней нагрузке q потенциал внешних сил с точностью до постоянного слагаемого определяется зависимостью $\Pi = q \Delta F$, где ΔF — увеличение площади, ограниченной кольцом. При увеличении площади кольца потенциал внешней гидростатической нагрузки возрастает, поэтому произведение $q \Delta F$ положительно. Поскольку изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ необходимо знать с точностью до квадратичных слагаемых, с той же точностью следует определять ΔF при деформации кольца.

Площадь, омеаемую элементом кольца при деформации, представим в виде суммы площадей треугольников AB_1A_1 и ABB_1 (рис. 6.6). Зная координаты вершин этих треугольников, подсчитаем их площади F_1 и F_2 по формулам аналитической геометрии:

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_{B_1} & y_{A_1} \\ z_{B_1} & z_{A_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} R \left(w + \frac{w^2}{R} + \frac{w}{R} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{v}{R} \frac{dw}{d\varphi} + v^2 \frac{1}{R} \right) d\varphi;$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_B & y_{B_1} \\ z_B & z_{B_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} R w d\varphi.$$

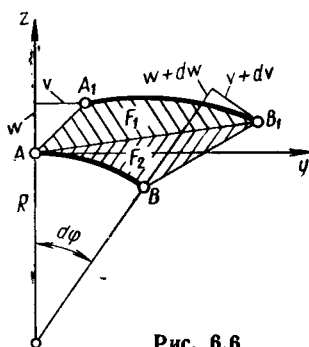


Рис. 6.6

Таким образом, площадь, ометаемая элементом кольца,

$$d(\Delta F) = F_1 + F_2 = R \left[w + \frac{1}{2} \frac{w}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{v}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \right] d\varphi.$$

Интегрируя это выражение по всему кольцу, находим изменение площади ΔF .

Для определения критического значения q воспользуемся изменением полной потенциальной энергии кольца, записанным в форме Брайана. Перемещения, переводящие кольцо в новое отклоненное состояние, представим в виде $v = \alpha v_1(\varphi)$; $w = \alpha w_1(\varphi)$, где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от угла φ ; $v_1(\varphi)$ и $w_1(\varphi)$ — конечные функции угла φ .

Используя выражения (6.14), запишем

$$\varepsilon = \alpha \varepsilon' + \alpha^2 \varepsilon''; \vartheta = \alpha \vartheta'; \kappa = \alpha \kappa',$$

где

$$\varepsilon' = \frac{1}{R} \left(w_1 + \frac{dv_1}{d\varphi} \right), \quad \vartheta' = \frac{1}{R} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} - v_1 \right), \quad \kappa' = \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} - \frac{dv_1}{d\varphi} \right)$$

и

$$\varepsilon'' = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} - v_1 \right)^2.$$

Выражение для $d(\Delta F)$ можно переписать так:

$$d(\Delta F) = R \left[\alpha w_1 + \frac{\alpha^2}{2} (w_1 \varepsilon' - v_1 \vartheta') \right] d\varphi.$$

Если ось кольца считать нерастяжимой с точностью до первой степени α , т. е. принять $\varepsilon' = 0$ и $w_1 = -\frac{dv_1}{d\varphi}$, то изменение полной потенциальной энергии кольца (множитель α^2 опускаем)

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} EJ \kappa'^2 R d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} N_0 \varepsilon'' R d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q v_1 \vartheta' R d\varphi,$$

где EJ — изгибная жесткость кольца в своей плоскости; N_0 — начальное усилие в кольце, причем в данной задаче $N_0 = -qR$.

Заметим, что интеграл $\alpha \int_0^{2\pi} w_1 R d\varphi$, как первая вариация площади, ограниченной нерастяжимым кольцом, равен нулю. Как известно, из всех замкнутых кривых заданной длины максимальную площадь ограничивает окружность, поэтому первая вариация площади окружности равна нулю.

Окончательно $\Delta\mathcal{E}$ можно выразить через окружное перемещение $v_1(\varphi)$. Опустив индекс «1» и учтя, что в рассматриваемой задаче $N_0 = -qR$, получим

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + v \right)^2 d\varphi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q v \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + v \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi - \right. \\ & \left. - q \frac{d^3 v}{d\varphi^2} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + v \right) \right] d\varphi. \quad (6.15)\end{aligned}$$

Дальнейшее решение можно вести из условия $\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$ либо $\Delta\mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума q . Подчеркнем, что выражение (6.15) получено для случая, когда на кольцо действует гидростатическая нагрузка q .

Нетрудно проверить, что условие стационарности $\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$ приводит к уравнению (6.10), полученному выше непосредственно из линеаризованных уравнений равновесия элемента кольца в отклоненном состоянии.

Действительно, для полученного функционала уравнение Эйлера имеет вид (см. приложение II)

$$-\frac{d^3}{d\varphi^3} \frac{\partial F}{\partial (d^3 v/d\varphi^3)} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial F}{\partial (d^2 v/d\varphi^2)} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial (dv/d\varphi)} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

где через F обозначено подынтегральное выражение в функционале (6.15). После несложных преобразований получим уравнение, совпадающее с уравнением (6.10):

$$\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) + q \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) = 0.$$

Как неоднократно подчеркивалось, энергетическим методом можно определять критические нагрузки, не решая дифференциальное уравнение Эйлера. Например, в рассматриваемой задаче можно задаться функцией перемещения

$$v_1 = c_1 \sin n\varphi \quad (n = 2, 3, \dots)$$

и из условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ найти собственные значения q_n . Подставив эту функцию в выражение (6.15), затем продифференцировав и проинтегрировав, получим

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{2} c^2 \left[\frac{EJ}{R^3} (n^3 - n)^2 - q (n^2 - 1) n^3 \right] = 0.$$

Откуда найдем собственные значения параметра нагрузки

$$q_n = \frac{(n^3 - 1) EJ}{R^3} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

совпадающие с найденными выше. Критическое значение нагрузки, соответствующее $n = 2$, совпадает с найденным выше точным значением $q_{кр}$, поскольку выбранная функция v_1 является точным решением задачи.

Для сравнения определим критическую нагрузку, воспользовавшись выражением изменения полной потенциальной энергии кольца в форме С. П. Тимошенко, что для кольца с нерастяжимой осью более логично (см. § 10).

Перемещения, переводящие кольцо в новое состояние, примем в виде

$$v = \alpha v_1(\varphi) + \alpha^2 v_2(\varphi);$$

$$w = \alpha w_1(\varphi) + \alpha^2 w_2(\varphi);$$

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от угла φ ; $v_1(\varphi)$, $v_2(\varphi)$, $w_1(\varphi)$, $w_2(\varphi)$ — конечные функции угла φ .

Учитывая выражения (6.14), получаем $\varepsilon = \alpha \varepsilon' + \alpha^2 \varepsilon''$; $\vartheta = \alpha \vartheta' + \alpha^2 \vartheta''$; $\kappa = \alpha \kappa' + \alpha^2 \kappa''$, где

$$\varepsilon' = \frac{1}{R} \left(w_1 + \frac{dv_1}{d\varphi} \right); \quad \vartheta' = \frac{1}{R} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} - v_1 \right);$$

$$\kappa' = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} - \frac{dv_1}{d\varphi} \right)$$

и

$$\varepsilon'' = \frac{1}{R} \left(w_2 + \frac{dv_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw_1}{d\varphi} - v_1 \right)^2;$$

$$\vartheta'' = \frac{1}{R} \left(\frac{dw_2}{d\varphi} - v_2 \right); \quad \kappa'' = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2} - \frac{dv_2}{d\varphi} \right).$$

Считая ось кольца нерастяжимой, с точностью до α записываем выражение изменения полной потенциальной энергии в форме С. П. Тимошенко (опуская множитель α^2):

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E J \kappa'^2}{R^3} d\varphi + \int_0^{2\pi} q w_2 R d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q v_1 \vartheta' R d\varphi. \quad (6.16)$$

Начальное усилие N_0 не входит в это выражение, но для определения $\Delta \mathcal{E}$ дополнительно нужно найти функцию $w_2 = w_2(\varphi)$. Как показано в § 10, квадратичные перемещения должны быть определены из условия самоуравновешенности квадратичных усилий. В данном случае введем квадратичный изгибающий момент M'' , связанный с κ'' соотношением упругости $M'' = E J \kappa''$.

С учетом решенной выше вспомогательной задачи изгиба кругового кольца под действием переменных нагрузок вместо уравнения (6.2) можно записать

$$\frac{d^3 M''}{d\varphi^3} + \frac{dM''}{d\varphi} = 0.$$

Правая часть этого уравнения равна нулю, поскольку внутренние квадратичные усилия должны быть самоуравновешены. Добавив к этому уравнению условия нерастяжимости оси кольца с точностью до α^2 и выразив M'' через v_2 и w_2 , получим два уравнения для определения v_2 и w_2 :

$$\frac{d^3}{d\varphi^3} \left(\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2} - \frac{dv_2}{d\varphi} \right) + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2} - \frac{dv_2}{d\varphi} \right) = 0;$$

$$e'' = \frac{1}{R} \left(w_2 + \frac{dv_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw_2}{d\varphi} - v_2 \right)^2 = 0.$$

Задавшись функциями для $v_1(\varphi)$ и $w_1(\varphi)$ с учетом условия периодичности по φ из полученной системы уравнений всегда можно найти $v_2(\varphi)$ и $w_2(\varphi)$. Например, при $v_1 = A \sin n\varphi$; $w_1 = -nA \cos n\varphi$ имеем систему уравнений

$$w_2 + \frac{dv_2}{d\varphi} = -\frac{A^2}{2R} (n^2 - 1)^2 \sin^2 n\varphi;$$

$$\frac{d^5 w_2}{d\varphi^5} - \frac{d^4 v_2}{d\varphi^4} + \frac{d^3 w_2}{d\varphi^3} - \frac{d^2 v_2}{d\varphi^2} = 0.$$

Решения, удовлетворяющие условию периодичности,

$$w_2 = -\frac{A^2 (n^2 - 1)^2}{4R} \left[1 + \frac{\cos 2n\varphi}{(2n)^2 - 1} \right];$$

$$v_2 = \frac{A^2 (n^2 - 1)^2 2n}{4R} \frac{\sin 2n\varphi}{(2n)^2 - 1}.$$

Продифференцировав и проинтегрировав, из выражения (6.16) получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \frac{\pi}{2} A^2 \left[\frac{EJ}{R^3} (n^2 - 1)^2 n^2 - q (n^2 - 1)^2 - q (n^2 - 1) \right] = \\ &= \frac{\pi A^2}{2} n^2 (n^2 - 1) \left[\frac{EJ (n^2 - 1)}{R^3} - q \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Приравняв $\Delta \mathcal{E}$ нулю, получим прежний результат.

Как видим, решение с использованием выражения $\Delta \mathcal{E}$ в форме С. П. Тимошенко является более громоздким, поскольку пришлось находить $w_2(\varphi)$ и $v_2(\varphi)$. Оно имеет и положительные стороны. Во-первых, в этом решении последовательно проводится условие нерастяжимости оси кольца. (Напомним, что при решении с использованием представления $\Delta \mathcal{E}$ в форме Брайана ось кольца считали нерастяжимой с точностью до α , но ее растяжение учитывали с точностью до α^2 .) Во-вторых, представление $\Delta \mathcal{E}$ в форме С. П. Тимошенко позволяет сравнительно просто получать приближенные решения при других случаях нагружения кольца.

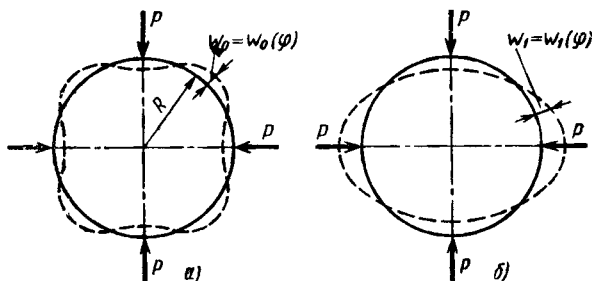


Рис. 6.7

Рассмотрим следующую задачу. Круговое кольцо сжато четырьмя равными радиальными силами P (рис. 6.7, а). При достаточно малых силах P четырехлепестковая форма является единственной и устойчивой формой равновесия кольца. Но при превышении некоторого значения $P_{кр}$ эта исходная форма становится неустойчивой и кольцо переходит в новую форму, лишенную исходной симметрии.

Решим эту задачу, пренебрегая изменением формы кольца в докритическом состоянии (см. § 7), причем в первом приближении зададим бифуркационные перемещения в виде $v_1 = A \sin n\varphi$, $w_1 = -nA \cos n\varphi$. Если решение вести с использованием выражения (6.15), то предварительно необходимо определить $N_0 = N_0(\varphi)$. Если для решения задачи воспользоваться выражением (6.16), то необходимость определения $N_0 = N_0(\varphi)$ отпадает. Считая, что при потере устойчивости кольцо будет деформироваться по $n = 2$ волнам (рис. 6.7, б) из (6.16) находим

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \frac{\pi}{2} A^2 \frac{EJ}{R^3} (n^2 - 1) n^2 + 4Pw_2(0) = \\ &= \frac{\pi A^2 (n^2 - 1)}{2} \left[\frac{n^2 EJ}{R^3} - \frac{P}{2\pi R} \frac{4(2n)^2}{(2n)^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

С учетом условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ имеем

$$\bar{P}_n = \frac{4P_n R^3}{2\pi R E J} = \frac{n^2}{1 + \frac{1}{(2n)^2 - 1}} = \frac{(2n)^2 - 1}{4}. \quad (6.18)$$

При $n = 2$ получим $\bar{P}_{кр} = 3,75$. Перемещения w_2 имеют симметрию такого же типа, как и перемещения w_0 (в данном случае четырехлепестковую).

Аналогично можно построить решение при большем числе сжимающих сил или распределенной нагрузке переменной интенсивности $q = q(\varphi)$. Во всех этих случаях приближенное решение можно получить, не определяя $N_0(\varphi)$.

В приведенном решении не учитывали изменение формы кольца в докритическом состоянии. Но, как нетрудно установить, форма кольца, нагруженного четырьмя силами, к моменту потери устойчивости заметно отличается от круговой. Если начальные прогибы кольца найти из обычного линейного решения и учесть их при определении критической нагрузки, то получим $\bar{P}_{кр} = 3,6$. Как видим, в данном случае, когда начальные перемещения связаны с изгибом системы, пренебрежение изменением формы кольца в докритическом состоянии приводит при определении критической нагрузки к погрешности порядка 10%, значительно превышающей погрешность порядка $\varepsilon_{кр}^0$ по сравнению с единицей (см. § 7).

Рассмотрим закритическое поведение кругового кольца. Выше определены критические точки бифуркации исходной формы равновесия кругового кольца при нескольких случаях его нагружения. Более детальное изучение закритического поведения кольца в окрестности критической точки бифуркации показывает, что при потере устойчивости кольцо ведет себя подобно сжатому стержню, продольные перемещения которого не стеснены (см. § 17). Следовательно, критическая точка бифуркации кольца A_1 оказывается точкой бифуркации первого типа, а малейшее превышение критической нагрузки приводит к резкому нарастанию прогибов кольца (рис. 6.8). Если имеется несколько дополнительных жестких опор, препятствующих перемещениям кольца, то его поведение после потери устойчивости будет иным. В том случае, когда число опор четное и они равномерно распределены по окружности кольца, критическое значение гидростатической внешней нагрузки определяется по следующей формуле (в случае нечетного числа опор нельзя пользоваться полученным выше решением для незакрепленного кольца):

$$q_{кр} = \frac{(N^2 - 1) EJ}{R^3}, \quad (6.19)$$

где $2N$ — число опор. На рис. 6.9, а показано кольцо, имеющее восемь опор; штриховой линией изображена форма потери устойчивости такого кольца.

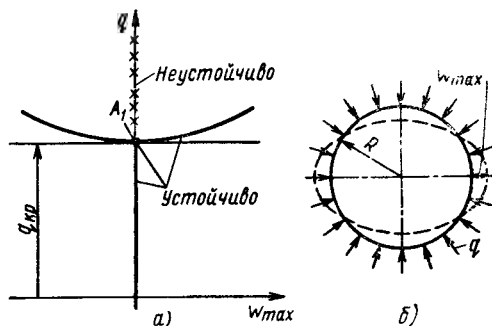


Рис. 6.8

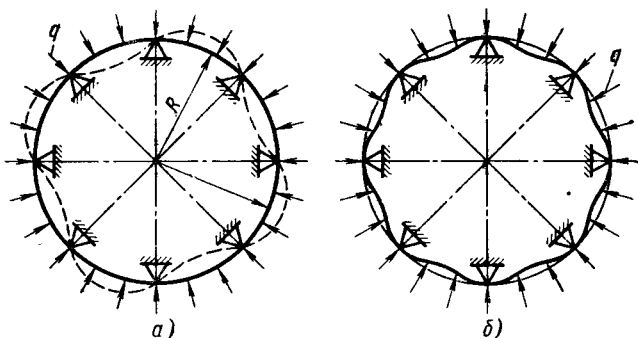


Рис. 6.9

В случае жестких опор критическая точка бифуркации A_1 является критической точкой первого типа, но при дальнейшем увеличении внешней нагрузки кольцо ведет себя подобно стержню с закрепленными относительно продольных смещений концами (см. § 17). Поведение кольца усложняется тем, что в процессе нагружения происходит перестройка формы равновесия кольца от бифуркационной формы, изображенной штриховой линией на рис. 6.9, а, к форме равновесия, при которой кольцо «зависает» на жестких опорах (рис. 6.9, б), продолжая воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

В заключение необходимо сказать несколько слов о практическом применении формулы для критической гидростатической нагрузки

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}. \quad (6.20)$$

Формула эта широко известна. Она вошла в руководства, справочники и учебники по сопротивлению материалов. Но для большинства практических задач, при решении которых сжатое радиальной нагрузкой круговое кольцо приходится рассчитывать на устойчивость, эта формула не верна.

На рис. 6.10 приведены типичные схемы нагружения круговых колец равномерно распределенными радиальными сжимающими усилиями. Во всех этих случаях исходное докритическое напряженное состояние колец одинаково и совпадает с напряженным состоянием, возникающим в кольце под действием гидростатического нагружения.

Круговое кольцо, показанное на рис. 6.10, а, представляет собой шпангоут, устанавливаемый в месте стыка сферического днища, радиус кривизны которого R_c , и цилиндрической части бака радиуса R . Пользуясь безмоментной теорией оболочек, нетрудно определить интенсивность радиального усилия, сжимающего шпангоут при нагружении бака внутренним давлением p :

$$q = \frac{pR_c}{2} \cos \theta.$$

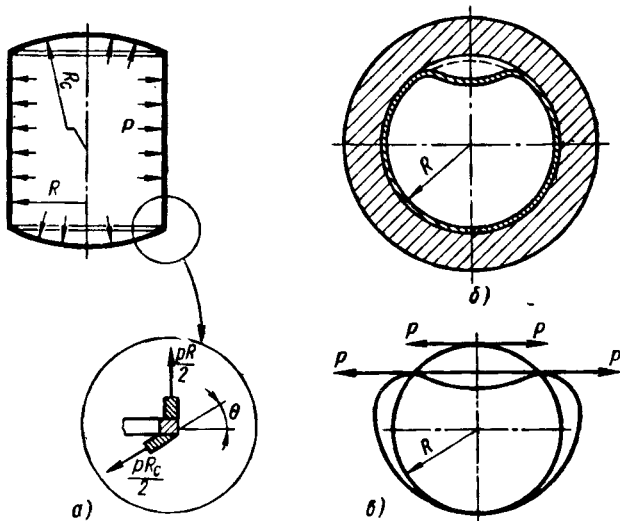


Рис. 6.10

Передаваемая на шпангоут нагрузка не является гидростатической: при изгибе шпангоута она существенно изменяется по величине и направлению. Поэтому формула (6.20) не верна. Кроме того, в ней не учитывается поддерживающее влияние оболочки. В результате критическая нагрузка, подсчитываемая по формуле (6.20), оказывается во много раз меньше действительной критической [29].

На рис. 6.10, б показано тонкое упругое кольцо, сжатое жесткой обоймой (такого типа нагружение может быть вызвано, например, нагревом кольца). На рис. 6.10, в изображено тонкое упругое кольцо, стянутое гибкой нитью. В обоих случаях нагрузка, воспринимаемая кольцом, не гидростатическая, причем поведение колец при потере устойчивости даже качественно отлично от поведения кольца, теряющего устойчивость под действием гидростатической нагрузки [39]. Можно привести и другие примеры, когда по формуле для критической гидростатической нагрузки получается неверный результат. Значительно труднее указать практическую задачу, в которой использование формулы (6.20) строго обосновано. Единственный такой пример — это расчет на устойчивость длинной цилиндрической трубы под действием внешнего давления.

Однако задача устойчивости кругового кольца под действием равномерной гидростатической нагрузки представляет большой интерес. В методическом отношении эта сравнительно простая задача помогает лучше понять более сложные задачи устойчивости тонкостенных оболочек вращения при различных схемах их нагружения.

В практическом отношении подкупаяюще лаконичная окончательная расчетная формула тоже полезна, несмотря на сделанные выше замечания. Она дает возможность оценить снизу критическую нагрузку в тех случаях, когда трудно получить точное решение.

§ 32. Основные исходные зависимости для цилиндрической оболочки

В задачах устойчивости стержней и пластин, которые рассмотрены в предыдущих параграфах, критические нагрузки пропорциональны изгибным жесткостям. Так, для сжатого стержня критическая сила определена по формуле $P_{кр} = C \frac{\pi^2 EJ}{l^3}$, а для прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении, критическая интенсивность распределенной нагрузки — по формуле $q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^3}$, где EJ и D — изгибные жесткости стержня и пластины. В эти формулы не входят значения жесткостей стержня и пластины на растяжение — сжатие, поскольку при бесконечно малом изгибе прямого стержня и плоской пластины удлинения оси стержня или деформации срединной плоскости пластины имеют второй порядок малости. Жесткость стержня на растяжение-сжатие влияет только на закритическое поведение стержня (в том случае, когда концы стержня закреплены относительно продольных смещений) так же, как жесткость пластины на растяжение-сжатие влияет только на закритическое поведение пластины с закрепленным контуром.

Основная геометрическая особенность оболочки состоит в том, что при надлежащем закреплении ее краев она не допускает даже

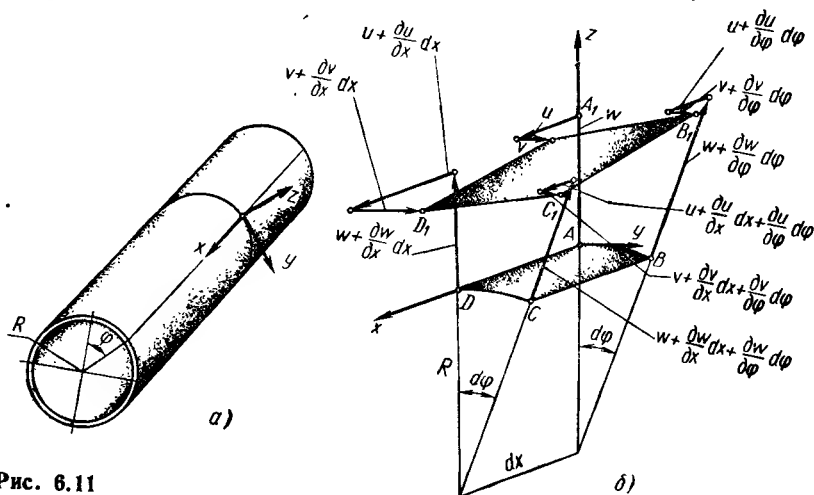


Рис. 6.11

бесконечно малых чисто изгибных деформаций без растяжения-сжатия ее срединной поверхности. Например, замкнутую выпуклую оболочку или закрепленную по обоим торцам цилиндрическую оболочку нельзя деформировать, не вызывая удлинений и сдвигов в срединной поверхности, причем эти удлинения и сдвиги будут иметь тот же порядок, что и поперечные прогибы оболочки.

Эта геометрическая особенность оболочек приводит, во-первых, к тому, что формулы для критических нагрузок оболочек имеют более сложную структуру по сравнению с формулами для критических нагрузок стержней и пластин: в них-входят изгибная жесткость оболочки и жесткость на растяжение-сжатие. Во-вторых, в результате этой особенности закритическое поведение оболочек качественно отличается от закритического поведения стержней и пластин вблизи критических точек бифуркации.

Поместим начало подвижной системы координат $x y z$ на срединной поверхности цилиндрической оболочки, направив ось x вдоль образующей, ось y — по касательной, а ось z — по внешней нормали к срединной поверхности (рис. 6.11, а). Перемещения точек срединной поверхности по направлениям осей x, y, z обозначим соответственно u, v, w . Координаты точек A, B, C, D элемента срединной поверхности оболочки и координаты точек A_1, B_1, C_1, D_1 этого элемента после деформации оболочки в системе координат $x y z$, связанной с точкой A (рис. 6.11, б), приведены ниже.

Используя выражения для координат и ограничиваясь пока линейными относительно перемещений u, v, w и их производных

Точка	x	y	z
A	0	0	0
B	0	$R d\varphi$	0
C	dx	$R d\varphi$	0
D	dx	0	0
A_1	u	v	w
B_1	$u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$	$R d\varphi + v + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + w d\varphi$	$w + \frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi - v d\varphi$
C_1	$dx + u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi +$ $+ \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$R d\varphi + v + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi +$ $+ \frac{\partial v}{\partial x} dx + w d\varphi$	$w + \frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi +$ $+ \frac{\partial w}{\partial x} dx - v d\varphi$
D_1	$dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$	$w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$

слагаемыми, нетрудно найти компоненты деформаций срединной поверхности:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \quad \gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.21)$$

а также углы поворота нормали к срединной поверхности ϑ_x и ϑ_y в плоскостях xz и zy :

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_y = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right). \quad (6.22)$$

Если пренебречь влиянием деформаций срединной поверхности на изменение ее кривизн κ_x , κ_y и крутку κ_{xy} , то можно получить выражения [29]

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \kappa_y &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \kappa_{xy} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

В большинстве случаев потеря устойчивости цилиндрической оболочки происходит таким образом, что $\left| \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right| \gg v$ и $\left| \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right| \gg w$. Поэтому в задачах устойчивости часто используют упрощенные зависимости

$$\vartheta_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{R \partial \varphi} \quad (6.24)$$

и

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x}. \quad (6.25)$$

При деформациях в оболочке возникают нормальные усилия T_x , T_y , сдвигающее усилие S , изгибающие M_x , M_y и скручивающий M_{xy} моменты. Эти внутренние силовые факторы связаны с компонентами деформаций срединной поверхности оболочки и изменением ее кривизн соотношениями упругости, основанными на гипотезе неискривляемости нормали:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \quad T_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); \\ S &= Gh\gamma = \frac{Eh(1-\mu)}{(1-\mu^2)^2} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

и

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y); \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x); \quad M_{xy} = (1-\mu) D \kappa_{xy}, \quad (6.27)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Для получения линеаризованных уравнений, описывающих потерю устойчивости цилиндрической оболочки, выведем линейные уравнения, описывающие поведение произвольно нагруженной оболочки при малых перемещениях.

Рассматривая равновесие элемента оболочки в недеформированном состоянии (рис. 6.12), приходим к следующей системе уравнений (чтобы не затемнять рисунка внутренние силовые факторы, связанные с изгибом оболочки, показаны отдельно):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} + p_x &= 0; \\ \frac{\partial T_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{Q_y}{R} + p_y &= 0; \\ \frac{T_y}{R} + \frac{\partial Q_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} &= p_z \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{R \partial \varphi} - Q_x &= 0; \\ \frac{\partial M_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

где p_x, p_y, p_z — интенсивности внешних распределенных нагрузок, действующих в направлениях соответствующих осей.

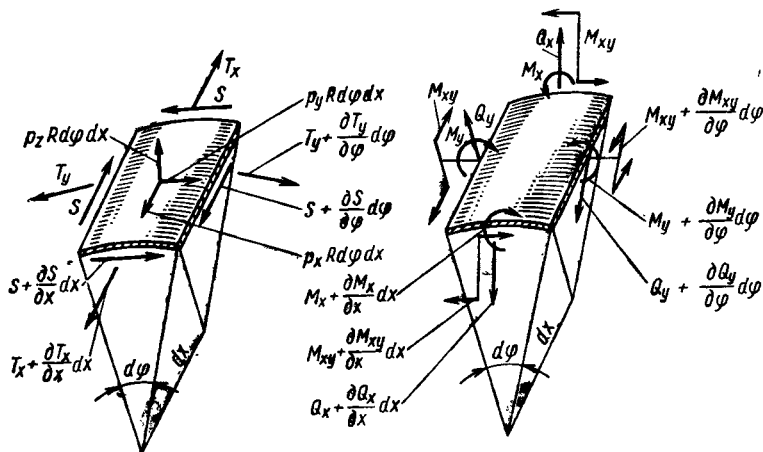


Рис. 6.12 (направление моментов M_{xy} следует считать обратным)

Исключив из систем уравнений (6.28) и (6.29) внутренние поперечные силы Q_x и Q_y , придем к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} + p_x &= 0; \\ \frac{\partial T_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + p_y &= 0; \\ \frac{T_y}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{R^2 \partial \varphi^2} &= p_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Используя соотношения упругости (6.26) и (6.27), получаем систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi \partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p_x &= 0; \\ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial \varphi \partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \frac{D}{R} \left[\frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 w}{R \partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial w}{R^3 \partial \varphi} \right] + p_y &= 0; \\ \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \left[\nabla^2 \nabla^2 w + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{R^4 \partial \varphi^2} + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] &= p_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

где

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2 (*)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (*)}{R^2 \partial \varphi^2}.$$

Для замкнутой в окружном направлении цилиндрической оболочки на каждом из ее торцов должны быть заданы по четыре граничных условия:

- 1) перемещение u либо осевое усилие T_x ;
- 2) перемещение v либо сдвигающее усилие S ;
- 3) угол наклона нормали ϑ_x либо изгибающий момент M_x ;
- 4) перемещение w либо приведенное поперечное усилие

$$Q_x^* = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial \varphi} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{R \partial \varphi}.$$

В том случае, когда выражения изменения кривизн κ_x , κ_y , κ_{xy} берут в упрощенном виде (6.25), уравнения равновесия должны быть также упрощены [29]. Из второго уравнения равновесия

(6.28) следует отбросить слагаемое $\frac{Q_y}{R}$. Тогда уравнения равновесия (6.30) при $p_x = 0$ и $p_y = 0$ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial T_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0; \\ \frac{T_y}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{R^2 \partial \varphi^2} &= p_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Если ввести функцию усилий Φ , связанную с усилиями соотношениями

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = T_y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \varphi^2} = T_x; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial \varphi \partial x} = -S, \quad (6.33)$$

то два первых уравнения системы (6.32) будут удовлетворены тождественно. Исключая из системы (6.21) перемещения u и v , приходим к уравнению совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{R \partial \varphi \partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Используя далее соотношения упругости (6.26) и (6.27) и соотношения (6.33), получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w &= p_z; \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Уравнения, описывающие потерю устойчивости цилиндрической оболочки, получим при следующих допущениях, аналогичных допущениям, использованным при выводе линеаризованных уравнений стержней, пластин и кругового кольца.

1. Оболочка имеет идеально правильную цилиндрическую форму и ее начальное напряженное состояние безмоментное.

2. Изменением всех геометрических размеров оболочки в докритическом состоянии пренебрегаем.

3. При потере устойчивости связь между перемещениями и внутренними силовыми факторами в оболочке описывается соотношениями упругости (6.26) и (6.27).

4. Оболочка нагружена только приложенными к торцам мертвыми контурными усилиями и внешним гидростатическим давлением интенсивности $p = p(x, \varphi)$.

В соответствии с первым допущением в начальном докритическом состоянии в оболочке существуют только внутренние

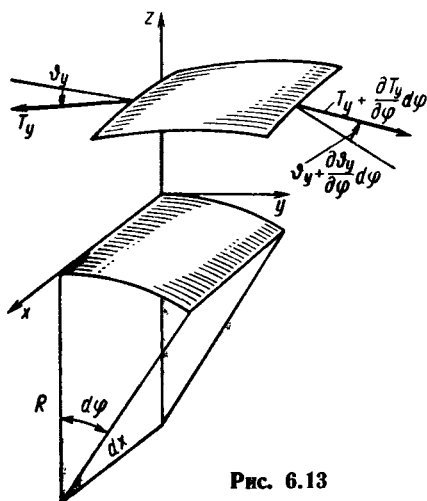


Рис. 6.13

усилия T_x^0 , T_y , S^0 , удовлетворяющие уравнениям равновесия безмоментной теории оболочек:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{R \partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial T_y^0}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S^0}{\partial x} &= 0; \\ \frac{T_\varphi^0}{R} &= -p. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Эти уравнения равновесия вытекают из уравнений (6.28) если в последних положить $Q_x = Q_y = 0$, $p_x = p_y = 0$ и $p_z = -p$.

Рассмотрим условие равновесия оболочки в отклоненном состоянии (рис. 6.13). Спроектируем все действующие на элемент усилия (на рис. 6.13 показано только усилие T_φ) на направление нормали z и определим фиктивную нормальную нагрузку (см. стр. 146 и 225)

$$p_z^\Phi = \frac{\partial}{R \partial \varphi} (T_y^0 \vartheta_y) + \frac{\partial}{\partial x} (T_x^0 \vartheta_x) + \frac{\partial}{\partial x} (S^0 \vartheta_y) + \frac{\partial}{\partial y} (S^0 \vartheta_x). \quad (6.36)$$

Учитывая уравнения (6.35), получим

$$p_z^\Phi = -p R \kappa_y + T_x^0 \kappa_x + 2 S^0 \kappa_{xy}, \quad (6.37)$$

где изменения кривизн κ_y , κ_x , κ_{xy} связаны с перемещениями оболочки формулами (6.23) или (6.25). Как нетрудно проверить, линейризованные уравнения равновесия элемента оболочки в отклоненном состоянии можно получить из линейных уравнений (6.30) или (6.31), положив в них $p_x = p_y = 0$ и $p_z = p_z^\Phi$. Используя, например, систему уравнений в перемещениях (6.31), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\ - \frac{(1-\mu^2) D}{R E h} \left[\frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 w}{R \partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial w}{R^3 \partial \varphi} \right] &= 0; \\ \frac{E h}{(1-\mu^2) R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \left[\nabla^2 \nabla^2 w + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 w}{R^4 \partial \varphi^2} + \frac{\mu \partial^3 w}{R^2 \partial x^2} \right] &= p_z^\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Если воспользуемся упрощенными выражениями кривизн (6.25) и соответствующей им системой уравнений (6.34), то получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w = -pR \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x}; \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

В задачах устойчивости однородная система уравнений должна быть подчинена однородным граничным условиям. Так, если на торце замкнутой цилиндрической оболочки задано $w = 0$, то остальные три однородных граничных условия на этом торце будут:

$$1) u = 0 \text{ либо } T_x = 0;$$

$$2) v = 0 \text{ либо } S = 0;$$

$$3) \vartheta_x = 0 \text{ либо } M_x = 0.$$

(Другие варианты граничных условий рассмотрены ниже.)

Таким образом, задача устойчивости цилиндрической оболочки при безмоментном начальном напряженном состоянии сведена к типичной задаче на собственные значения.

Приведем геометрические нелинейные соотношения, которые необходимы для исследования закритического поведения оболочки, и решения задач устойчивости цилиндрической оболочки энергетическим методом. Во-первых, для исследования устойчивости оболочки, находящейся в безмоментном начальном состоянии, удлинения и углы сдвига в срединной поверхности следует выражать с точностью до квадратичных слагаемых относительно бифуркационных перемещений и их производных.

Используем выражения для координат точек A, B, C, D элемента срединной поверхности оболочки до деформации и точек A_1, B_1, C_1, D_1 этого элемента после деформации и повторим преобразования, которые проведены при выводе аналогичных зависимостей для пластины и кольца. Тогда получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \vartheta_x^2; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{1}{2} \vartheta_\varphi^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \vartheta_x \vartheta_\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

где ϑ_x и ϑ_φ — углы поворота нормали, подсчитываемые по формулам (6.22) или (6.24).

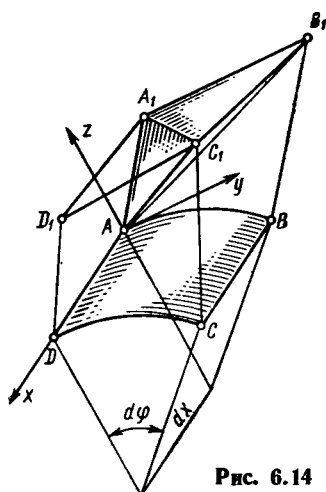


Рис. 6.14

Кроме того, если на оболочку действует гидростатическое давление, то изменение объема, ограниченного оболочкой, тоже нужно вычислять с точностью до квадратов бифуркационных перемещений и их производных. Для подсчета объема, ометаемого элементом $ABCD$, разобьем этот элементарный объем на шесть тетраэдров таким образом, чтобы тетраэдры смежных элементов имели общие грани: $AC_1B_1A_1$, $AD_1C_1A_1$, ADC_1D_1 , ABC_1B_1 , $ADCC_1$, $ACBC_1$. Тогда объем, ометаемый любой конечной частью оболочки, будет полностью и без пересечений заполнен элементарными тетраэдрами. На рис. 6.14 показан один такой тетраэдр $AC_1B_1A_1$.

Как известно, если одна из вершин тетраэдра совмещена с началом координат, то его объем вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

где x_i , y_i , z_i — координаты остальных трех вершин. Например, объем тетраэдра ADC_1D_1

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_D & y_D & z_D \\ x_{C_1} & y_{C_1} & z_{C_1} \\ x_{D_1} & y_{D_1} & z_{D_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} R d\varphi dx \left(w + \frac{w}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{R^2} \right).$$

Значения x_D , y_D и других координат взяты из таблицы, приведенной на стр. 239.

Суммируя объемы всех шести тетраэдров, находим [2]

$$d(\Delta V) = \left\{ w + \frac{1}{2} [w(\varepsilon'_x + \varepsilon'_y) - v\vartheta_y - u\vartheta_x] \right\} R d\varphi dx, \quad (6.41)$$

где ΔV — изменение объема, ограниченного оболочкой; ε'_x и ε'_y — относительные удлинения, подсчитанные по формулам (6.21), т. е. без учета квадратичных слагаемых.

Внутренняя потенциальная энергия деформации цилиндрической оболочки

$$U = \frac{D}{2} \iint [(\kappa_x + \kappa_y)^2 + 2(1 - \mu)(\kappa_{xy}^2 - \kappa_x \kappa_y)] R d\varphi dx + \\ + \frac{Eh}{2(1 - \mu^2)} \iint \left(\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1 - \mu}{2} \gamma^2 \right) R d\varphi dx. \quad (6.42)$$

Используя приведенные выше зависимости, нетрудно подсчитать изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ при переходе оболочки в возмущенное состояние, причем выражение для $\Delta \mathcal{E}$ можно записать в форме Брайана и С. П. Тимошенко.

Для записи энергетического критерия в форме Брайана бифуркационные перемещения точек срединной поверхности цилиндрической оболочки зададим в виде

$$u = \alpha u_1(x, \varphi); \quad v = \alpha v_1(x, \varphi); \quad w = \alpha w_1(x, \varphi), \quad (6.43)$$

где α — бесконечно малый параметр, не зависящий от координат.

Действуя в соответствии с намеченной в § 9 общей схемой решения, подсчитаем изменение полной потенциальной энергии оболочки при переходе от начального безмоментного состояния равновесия к смежному состоянию, описываемому функциями (6.43). Используя зависимости (6.42), (6.40) и (6.41) и опуская множитель α^2 , получаем

$$\Delta \mathcal{E} = U_e + U_\kappa + V + \Delta \Pi, \quad (6.44)$$

где

$$U_e = \frac{Eh}{2(1 - \mu^2)} \iint \left(\varepsilon_x'^2 + 2\mu \varepsilon_x' \varepsilon_y' + \varepsilon_y'^2 + \frac{1 - \mu}{2} \gamma'^2 \right) R d\varphi dx;$$

$$U_\kappa = \frac{D}{2} \iint [(\kappa_x' + \kappa_y')^2 + 2(1 - \mu)(\kappa_{xy}'^2 - \kappa_x' \kappa_y')] R d\varphi dx;$$

$$V = \iint (T_x^0 \varepsilon_x'' + S^0 \gamma'' + T_y^0 \varepsilon_y'') P d\varphi dx;$$

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \iint \rho [w_1(\varepsilon_x' + \varepsilon_y') - v_1 \vartheta_y' - u_1 \vartheta_x'] R d\varphi dx.$$

Здесь ε_x' , ε_y' , γ' , ϑ_x' , ϑ_y' и κ_x' , κ_y' , κ_{xy}' выражаются через перемещения $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $w_1(x, y)$ и их производные с помощью линейных зависимостей (6.21)–(6.23), а

$$\varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \vartheta_x'^2; \quad \varepsilon_y'' = \frac{1}{2} \vartheta_y'^2; \quad \gamma'' = \vartheta_y' \vartheta_x'. \quad (6.45)$$

Заметим, что если для подсчета ϑ_x' и ϑ_y' использовать упрощенные зависимости (6.24), то в выражении (6.44) следует опустить слагаемое $\Delta \Pi$, пропорциональное изменению объема обо-

лочки при переходе ее в новое состояние. Действительно, для оболочки, нагруженной внешним давлением p , имеем $T_y^0 = -pR$. Поэтому подсчитывая входящее в выражение для V слагаемое $T_y^0 \epsilon_y^* = -pR \frac{1}{2} \theta_y^{*2}$ по упрощенной зависимости, получим $T_y^0 \epsilon_y^* = -pR \frac{1}{2} (\partial w_1 / R \, d\varphi)^2$.

Таким образом, отбрасываем слагаемые того же порядка, что и величина $\Delta \mathcal{E}$.

Из этого, в частности, следует, что при использовании упрощенной теории цилиндрической оболочки в задачах устойчивости бессмысленно различать мертвую и гидростатическую распределенные поверхностные нагрузки.

Дальнейшее решение можно вести из условия $\delta (\Delta \mathcal{E}) = 0$ либо из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ при дополнительном условии минимума критической нагрузки. Причем, используя энергетический подход, можно получать точные и приближенные решения задач устойчивости.

Покажем, например, как из условия $\delta (\Delta \mathcal{E}) = 0$ можно вывести линеаризованные уравнения устойчивости цилиндрической оболочки, которые ранее получены непосредственно из условия равновесия элемента оболочки в отклоненном состоянии.

Воспользовавшись упрощенным вариантом записи выражений для изменения кривизн срединной поверхности оболочки и учитывая только что сделанное замечание, представим изменение полной потенциальной энергии оболочки $\Delta \mathcal{E}$ в виде

$$\Delta \mathcal{E} = \iint F(u, v, w) R \, d\varphi \, dx,$$

где

$$\begin{aligned} F(u, v, w) = & \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} + \frac{Eh}{2(1 - \mu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R} \right)^2 + \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} T_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\ & + S^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \varphi} + \frac{1}{2} T_y^0 \left(\frac{\partial w}{R \partial \varphi} \right)^2. \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера для функционала $\Delta \mathcal{E}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial \varphi)} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\partial v / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial (\partial v / \partial \varphi)} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\partial w / \partial x)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial (\partial w / \partial \varphi)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial (\partial^2 w / \partial x^2)} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial (\partial^2 w / \partial x \partial \varphi)} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{\partial F}{\partial (\partial^2 w / \partial \varphi^2)} = 0. \end{aligned}$$

После несложных выкладок отсюда получаем упрощенную систему линейаризованных уравнений в перемещениях. Если ввести функцию усилий Φ и воспользоваться уравнением совместности деформаций, то эти уравнения можно привести к системе двух уравнений (6.39).*

Напомним, что во всех приведенных выражениях начальные усилия T_x^0 , T_y^0 , S^0 считались найденными из решения уравнений безмоментной теории оболочек (6.35). Воспользовавшись записью энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко (см. § 10), можно избежать определения начальных усилий в оболочке, но для этого необходимо найти перемещения точек срединной поверхности оболочки второго порядка малости, как это сделано для кругового кольца и пластин.

§ 33. Определение внешнего критического давления

Начнем с простейшей задачи устойчивости длинной цилиндрической оболочки (трубы), нагруженной равномерным внешним гидростатическим давлением (рис. 6.15). Длину оболочки будем считать настолько большой, что характер закрепления ее торцов не влияет на поведение оболочки при потере устойчивости. (Ниже дана оценка длины оболочки, при которой можно пренебречь влиянием закреплений ее торцов на критическое давление). Такая длинная оболочка может деформироваться без удлинений и сдвигов срединной поверхности; в частности, каждое сечение оболочки может деформироваться одинаково, как нерастяжимое кольцо. Поэтому для определения критического внешнего давления и формы потери устойчивости такой оболочки можно воспользоваться решением задачи устойчивости кругового кольца под действием равномерной гидростатической нагрузки.

Для кольца собственные значения интенсивности равномерной гидростатической нагрузки определяем по формуле

$$q_n = \frac{(n^2 - 1) EJ}{R^3}. \quad (6.46)$$

Причем, собственные функции, соответствующие этим собственным значениям нагрузки, равны:

$$v = \sin n\varphi; \quad w = -n \cos n\varphi, \quad (6.47)$$

где n — число волн, по которым кольцо изгибается в своей плоскости.

* Аналогично линейаризованные уравнения устойчивости можно получить и в случае неупрощенных выражений изменения кривизн срединной поверхности оболочки. Для этого дополнительно необходимо проанализировать ряд второстепенных слагаемых в выражении полной потенциальной энергии.

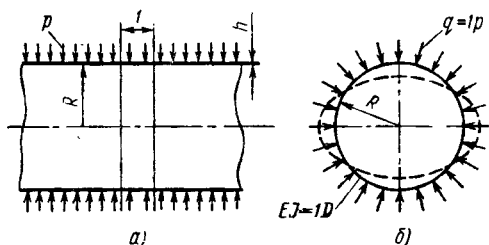


Рис. 6.15

Мысленно выделив из оболочки кольцо единичной ширины (рис. 6.15, а) и положив для такого кольца $EJ=1D$ и $q=1p$, где D — изгибная жесткость оболочки, вместо (6.46) можно записать

$$p_n = \frac{(n^2 - 1) D}{R^3}, \quad (6.48)$$

где p_n — собственные значения внешнего давления, при которых у оболочки существуют изгибные формы равновесия, смежные с исходной круговой формой равновесия. Функции (6.47) будут собственными функциями, соответствующими этим собственным значениям p_n .

Из формулы (6.48) при $n_{кр} = 2$ получим значение критического внешнего давления для рассматриваемой оболочки

$$p_{кр} = \frac{3D}{R^3} = \frac{Eh^3}{4(1-\mu^2)R^3}, \quad (6.49)$$

где h — толщина оболочки.

Поскольку окружное сжимающее напряжение в оболочке, нагруженной равномерным внешним давлением, равно $\sigma = \frac{pR}{h}$, критическое окружное сжимающее напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{Eh^2}{4(1-\mu^2)R^2}. \quad (6.50)$$

Форма потери устойчивости оболочки описывается функциями (с точностью до общего множителя) $v_{кр} = \sin 2\varphi$; $w_{кр} = -2 \cos 2\varphi$. При потере устойчивости поперечное сечение оболочки принимает эллиптическую форму (рис. 6.15, б).

В данном случае, когда цилиндрическая оболочка теряет устойчивость без удлинений и сдвигов срединной поверхности, критическая нагрузка зависит только от изгибной жесткости оболочки, и структура формулы (6.50) для критического окружного напряжения не отличается от структуры формулы для критического напряжения равномерно сжатой в одном направлении прямоугольной пластины со свободными краями. Полученный результат можно использовать и для цилиндрической оболочки со свободными торцами: она тоже может потерять устойчивость без удлинений и сдвигов срединной поверхности.

Выясним, как закрепление торцов цилиндрической оболочки влияет на величину критического давления. Для этого воспользуемся сначала упрощенным вариантом теории цилиндрической оболочки, сводящимся к системе уравнений (6.39). Будем считать, что в докритическом состоянии $T_x^0 = 0$; $T_y^0 = -pR$; $S^0 = 0$.

Тогда фиктивная поперечная нагрузка, определяемая зависимостью (6.37), равна

$$p_z^{\Phi} = T_y^0 \kappa_y = -\frac{p}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},$$

и система уравнений (6.39) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{p}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= 0; \\ \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Напомним, что Φ — функция усилий, определяемая соотношениями (6.33).

Для оболочки конечной длины система уравнений (6.51) допускает элементарное аналитическое решение только при одной единственной комбинации граничных условий — при $x = 0$ и $x = l$:

$$1) w = 0; 2) M_x = 0; 3) v = 0; 4) T_x = 0. \quad (6.52)$$

Как нетрудно проверить, для замкнутой оболочки эти граничные условия выполняются, если при $x = 0$ и $x = l$

$$1) w = 0; 2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; 3) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; 4) \Phi = 0. \quad (6.52a)$$

Заметим, что выписанные граничные условия своеобразны: это не условия свободного опирания края оболочки, поскольку $v = 0$, следовательно, $S \neq 0$, и не условия шарнирного закрепления, так как $T_x = 0$ и $u \neq 0$.

Решение системы уравнений (6.51) при этих граничных условиях можно разыскивать в виде

$$\begin{aligned} w &= A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi; \\ \Phi &= B \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Подставив функции (6.53) в систему уравнений (6.51) и сократив общий для всех слагаемых множитель $\sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi$, получим однородную систему линейных уравнений

$$\left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 - \frac{pn^2}{R} \right\} A - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 B = 0;$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 A + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 B = 0.$$

Приравнивая нулю определитель полученной системы уравнений, находим собственные значения задачи

$$p_{nm} = \frac{DR \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2}{n^2} + \frac{Eh \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4}{n^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2}, \quad (6.54)$$

где $2n$ и m — число полуволн в окружном и продольном направлениях, по которым изгибается срединная поверхность оболочки (рис. 6.16).

Обратим внимание на структуру полученного выражения: величина p_{nm} зависит от изгибной жесткости оболочки D и жесткости оболочки на растяжение-сжатие Eh , ибо закрепленная по обоим торцам цилиндрическая оболочка не может деформироваться без удлинений и сдвигов срединной поверхности.

Очевидно, что при определении $p_{кр}$ как наименьшего собственного значения следует принять $m = 1$. Тогда из (6.54) получим

$$p_n = \frac{Dn^2}{R^3} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^4}{n^6 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2}. \quad (6.55)$$

При определении критического значения $p_{кр}$ для конкретной оболочки необходимо в зависимости $p_n = p_n \left(n, \frac{h}{R}, \frac{R}{l} \right)$, выражаемой формулой (6.55), подобрать число волн в окружном направлении $n_{кр}$, дающее минимальное значение p_n . На рис. 6.17, а дана типичная зависимость безразмерного давления $\bar{p}_n = p_n/p_{кр}^\infty$ от числа волн n ($\frac{R}{h} = 500$; $\frac{l}{R} = 2$; $\bar{p}_{кр} = 38,3$; $n_{кр} = 9$), где

$$p_{кр}^\infty = \frac{3D}{R^3} = \frac{Eh^3}{4(1-\mu^2)R^3}. \quad (6.56)$$

Штриховой линией показана зависимость для $\bar{p}_n$, построенная в предположении непрерывного изменения числа волн n .

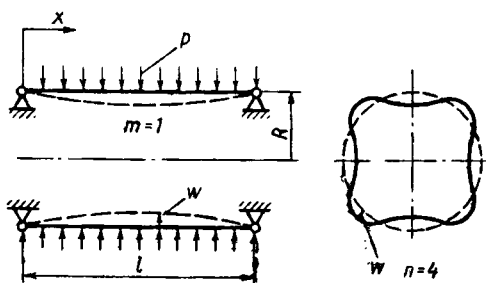


Рис. 6.16

Результаты таких расчетов представлены на рис. 6.17, б, на котором по оси абсцисс отложена безразмерная длина оболочки l/R , по оси ординат — безразмерное критическое давление $\bar{p}_{кр} = p_{кр}/p_{кр}^\infty$, показывающее, во сколько раз критическое давление для оболочки с закреплен-

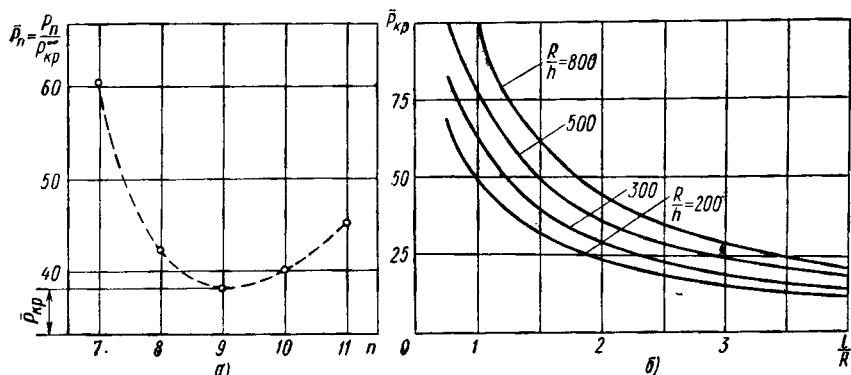


Рис. 6.17

ными торцами превышает критическое давление для бесконечно длинной оболочки (оболочки со свободными торцами).

Упрощенная система уравнений (6.51) получена при условии $|d^2w/d\varphi^2| \gg w$, $|dw/d\varphi| \gg v$. В данном случае, когда поперечный прогиб w определяется выражением (6.53), оно сводится к условию $n^2 \gg 1$. Следовательно, зависимость (6.55) справедлива только при $n^2 \gg 1$. В частности, поэтому при $R/l \rightarrow 0$ зависимость (6.55) не сходится к формуле (6.48) для бесконечно длинной оболочки. Если не вводить таких упрощающих предположений, то задача устойчивости цилиндрической оболочки сводится к системе трех уравнений (6.38), которая в рассматриваемом случае при

$p_z^0 = -pR\kappa_y = -\frac{p}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\ - \frac{(1-\mu^2)D}{REh} \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \varphi} \right) &= 0; \\ \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + D \left(\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{R^4 \partial \varphi^2} + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{p}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

Решение этой системы при граничных условиях (6.52) можно найти в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos \frac{\pi x}{l} \cos n\varphi; \\ v &= B \sin \frac{\pi x}{l} \sin n\varphi; \\ w &= C \sin \frac{\pi x}{l} \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

Подстановка этих функций для u , v , w в систему уравнений (6.57) приводит к системе трех однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A , B и C . Из условия равенства нулю определителя этой системы можно найти собственные значения давления p_{nm} .

Приняв $m = 1$ и отбросив некоторые второстепенные слагаемые, получим

$$p_n = \frac{D}{R^3} \frac{B_2}{B_1} + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l}\right)^4}{B_1}, \quad (6.59)$$

где

$$B_1 = n^2 \left[\left(\frac{\pi R}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2 - n^4; \quad B_2 = \left[\left(\frac{\pi R}{l}\right)^2 + n^2 \right]^4 - 2n^6 + n^4.$$

В отличие от (6.55) при $R/l \rightarrow 0$ зависимость (6.59) сводится к формуле (6.48). Приняв $n^2 \gg 1$, из (6.59) можно получить (6.55). Для определения критического давления $p_{кр}$ в (6.59) следует подобрать значение n , соответствующее минимуму p_n .

Из несложного анализа выражения (6.59) следует, что при $l/R > 2\sqrt{R/h}$ рассмотренное закрепление торцов оболочки практически не влияет на $p_{кр}$, и оболочку как бесконечно длинную можно рассчитывать на устойчивость по формуле (6.48).

Полученные зависимости для p_n малоудобны для практического использования. Определение критического давления $p_{кр}$ связано с проведением дополнительных расчетов по подбору $n_{кр}$. Зависимости (6.55) и (6.59) особенно неудобны для проекторочных расчетов, когда при заданном значении внешнего давления $p_{кр}$ и известных габаритных размерах оболочки R и l из условия ее устойчивости нужно подобрать толщину оболочки h или при известных радиусе оболочки R и толщине обшивки h необходимо найти расстояние между шпангоутами.

Для оболочек средней длины при $0,3\sqrt{R/h} > l/R > \sqrt{h/R}$ эти расчетные зависимости можно существенно упростить. В указанном диапазоне можно принять $n^2 \gg \left(\frac{\pi R}{l}\right)^2$, тогда вместо (6.55) и (6.59) получим

$$p_n = \frac{D}{R^3} n^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l}\right)^4}{n^2}.$$

Минимизируя полученное выражение по n из условия $dp_n/dn = 0$ находим (при $\mu = 0,3$)

$$n_{кр}^2 = \frac{\pi R}{l} \sqrt[4]{36(1-\mu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \approx 7,5 \frac{R}{l} \sqrt{\frac{R}{h}}; \quad (6.60)$$

$$p_{кр} = \frac{\pi \sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{3/4}} E \left(\frac{R}{l}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} = 0,92 E \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (6.61)$$

Последнюю формулу обычно называют формулой П. Ф. Папковича.

Используя (6.56), для оболочек средней длины можно записать, что безразмерное критическое давление

$$\bar{p}_{кр} = \frac{p_{кр}}{p_{кр}^{\infty}} = \frac{4\pi \sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{3/4}} \frac{R}{l} \sqrt{\frac{R}{h}} = 3,68 \frac{R}{l} \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (6.62)$$

Нетрудно проверить, что формула (6.62), являющаяся преобразованной формулой П. Ф. Папковича, с большой точностью описывает все кривые, представленные на рис. 6.17, б.

Для коротких оболочек (находящихся в безмоментном начальном состоянии) при $l/R < \sqrt{h/R}$ общие зависимости тоже можно значительно упростить. Как показывают расчеты, в этом случае оболочка теряет устойчивость с образованием такого большого числа волн в окружном направлении, что вторым слагаемым в зависимости (6.55) можно пренебречь. Тогда для сжимающего окружного усилия T_y^0 получим формулу

$$(T_y^0)_n = \frac{Dn^2}{R^2} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2 = \frac{\pi^2 D}{l^2} \left(\frac{2\pi R}{l2n} + \frac{l2n}{2\pi R} \right)^2.$$

Значение $(T_y^0)_n$ будет минимальным при $2n = \frac{2\pi R}{l}$. Критическое значение окружного сжимающего усилия

$$(T_y^0)_{кр} = 4 \frac{\pi^2 D}{l^2}. \quad (6.63)$$

В этом предельном случае критическая нагрузка зависит только от изгибной жесткости оболочки D и не зависит от ее жесткости на растяжение-сжатие Eh .

Формула (6.63) подобна формуле для критической нагрузки шарнирно-опертой прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении. Следовательно, короткая цилиндрическая оболочка с опертыми торцами, находящаяся в безмоментном начальном состоянии $T_y^0 = \text{const}$, $T_x^0 = 0$, $S^0 = 0$, теряет устойчивость так же, как и сжатая в продольном направлении удлиненная шарнирно-опертая прямоугольная пластина, ширина которой b равна длине оболочки l , причем число полуволн, очевидно, равно $2n$.

Влияние осевого усилия на критическое внешнее давление. Во всех рассмотренных решениях $T_x^0 = 0$, но в большинстве реальных случаев нагружение цилиндрической оболочки внешним давлением сопровождается возникновением в ней осевых усилий. Так, например, при всестороннем внешнем давлении $T_x^0 = -\frac{pR}{2}$ (рис. 6.18, а).

Рассмотрим случай, когда в цилиндрической оболочке наряду с окружным начальным сжимающим усилием $T_y^0 = -pR$ имеется осевое начальное сжимающее или растягивающее усилие $T_x^0 = \nu T_y^0$, где ν — некоторый фиксированный коэффициент

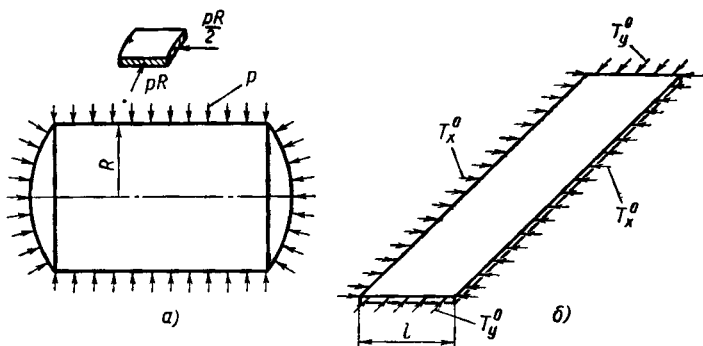


Рис. 6.18

(при всестороннем давлении $\nu = \frac{1}{2}$). Тогда при использовании упрощенных уравнений теории цилиндрической оболочки вместо $p_z^\phi = T_y^0 \chi_y$ необходимо принять

$$p_z^\phi = T_y^0 \chi_y + T_x^0 \chi_x = -\frac{p}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \nu R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

При граничных условиях (6.52) все дальнейшее решение полностью повторяется, но вместо окончательной зависимости (6.55) получим (при $m = 1$)

$$p_n = \frac{Dn^3 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2}{R^3 \left[1 + \frac{\nu}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]} + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^4}{n^6 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2 \left[1 + \frac{\nu}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]}. \quad (6.64)$$

Откуда следует, что для оболочек средней длины при абсолютной величине ν порядка единицы осевое начальное усилие незначительно влияет на критическое внешнее давление. В частности, оболочки средней длины, находящиеся под действием всестороннего внешнего давления, можно рассчитывать на устойчивость по формуле П. Ф. Папковича. Для коротких оболочек влияние осевого усилия на критическое внешнее давление можно учесть с помощью зависимости (6.64), подбирая при фиксированном ν число волн в окружном направлении $n_{кр}$ из условия минимума p_n , причем при абсолютной величине ν порядка единицы это влияние не велико.

Влияние осевого начального усилия оказывается существенным только для коротких оболочек, рассчитываемых на устойчивость как пластины по формулам типа (6.63) без учета влияния

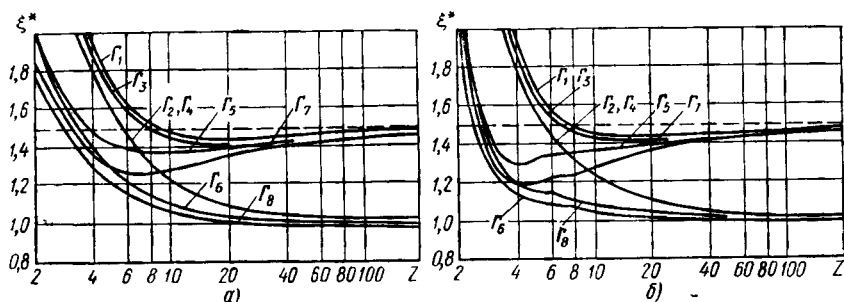


Рис. 6.19

кривизны оболочки (рис. 6.18, б). В этом случае расчет сводится к расчету удлиненной прямоугольной пластины, равномерно нагруженной в двух направлениях.

Расчет на устойчивость цилиндрической оболочки при сжимающих осевых усилиях, существенно превосходящих по абсолютной величине окружающие сжимающие усилия, рассмотрен в следующем параграфе.

В заключение напомним, что основное решение, изложенное в этом параграфе, получено для одной единственной комбинации граничных условий (6.52), а начальное напряженное состояние оболочки считалось безмоментным. Долгое время это решение, опубликованное Мизесом в 1914 г., было единственным точным решением для цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением. Сравнительно недавно с помощью ЭЦВМ ряду авторов удалось получить практически точные решения, свободные от указанных ограничений.

Результаты решения, полученного методом конечных разностей для различных вариантов граничных условий с учетом и без учета моментности докритического состояния оболочки [23], приведены соответственно на рис. 6.19, а и б. Здесь использованы следующие обозначения:

$$Z = \frac{l \sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{Rh}} = \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{l}{R} \sqrt{1-\mu^2}; \quad \xi^* = \frac{p_{кр}}{p_{кр}^*},$$

где $p_{кр}^*$ определяется по формуле П. Ф. Папковича.

Приведенные кривые соответствуют следующим вариантам граничных условий на обоих торцах оболочки:

$$\Gamma_1 \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0;$$

$$\Gamma_2 \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad T_x = 0, \quad v = 0;$$

$$\Gamma_3 \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad S = 0;$$

$$\Gamma_4 \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad T_x = 0, \quad S = 0;$$

$$\Gamma_5 \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad u = 0, \quad v = 0;$$

$$\Gamma_6 \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad T_x = 0, \quad v = 0;$$

$$\Gamma_7 \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad u = 0, \quad S = 0;$$

$$\Gamma_8 \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad T_x = 0, \quad S = 0.$$

Как видно из приведенных кривых, формулой П. Ф. Папковича можно пользоваться для граничных условий Γ_2 , Γ_4 , Γ_6 и Γ_8 в достаточно широком диапазоне изменения геометрического параметра Z . Упрощенное аналитическое решение, позволяющее учесть влияние граничных условий на $\rho_{кр}$, приведено в § 37 [4].

§ 34. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Первые теоретические решения задачи по определению критической нагрузки для сжатой в осевом направлении тонкостенной цилиндрической оболочки (рис. 6.20, а) были даны Лоренцом и С. П. Тимошенко в начале века. Они считали, что оболочка имеет идеально правильную цилиндрическую форму, а ее начальное напряженное состояние является безмоментным и однородным, и определяли наименьшую нагрузку, при которой наряду с начальным безмоментным состоянием появлялись смежные изгибные состояния равновесия оболочки. Такую постановку задачи устойчивости оболочек называют классической.

Рассмотрим решение задачи устойчивости цилиндрической оболочки в классической постановке при осесимметричной форме потери устойчивости. Для получения однородного линеаризованного уравнения, описывающего такую форму потери устойчивости, воспользуемся широко известным уравнением изгиба цилиндрической оболочки при осесимметричной нагрузке. Это уравнение нетрудно получить из приведенных в § 32 общих зависимостей

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p_z, \quad (6.65)$$

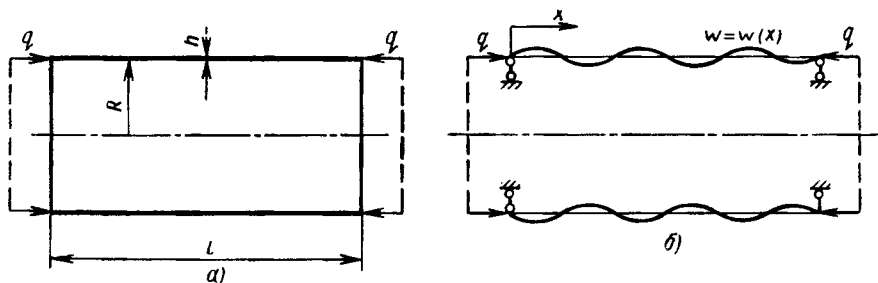


Рис. 6.20

где $w = w(x)$ — поперечный прогиб оболочки; $p_z = p_z(x)$ — интенсивность радиальной осесимметричной нагрузки.

Учитывая, что при осесимметричной форме потери устойчивости изменение кривизны срединной поверхности $\kappa_x = \frac{d^2 w}{dx^2}$, находим фиктивную радиальную нагрузку

$$p_z^\Phi = T_x^0 \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (6.66)$$

Считая, что в начальном состоянии $T_x^0 = -q$, $T_y^0 = 0$, $S^0 = 0$, и заменяя в уравнении (6.65) p_z на p_z^Φ , приходим к однородному линейаризованному уравнению

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (6.67)$$

Это уравнение совпадает с линейаризованным уравнением изгиба сжатого прямого стержня, связанного с упругим винклеровским основанием (см. § 15). Роль изгибной жесткости стержня EJ играет изгибная жесткость оболочки D , а роль упругого основания — жесткость оболочки на растяжение-сжатие в окружном направлении.

Решение такого уравнения обсуждалось в § 15; в частности, если при $x = 0$ и $x = l$ задано:

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

то решение имеет вид $w_m(x) = A_m \sin \frac{m\pi x}{l}$, где m — число полу-волн, по которым изгибается образующая цилиндрической оболочки (рис. 6.20, б). Соответствующие собственные значения интенсивности нагрузки равны

$$q_m = D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}; \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Если число полуволн m считать достаточно большим, а величину $\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 = \eta$ непрерывно изменяющейся, то из условия минимума

$$\frac{dq_m}{d\eta} = D - \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta^3} = 0$$

находим

$$m_{кр} = \frac{l}{\pi R} \sqrt[4]{\frac{EhR^2}{D}} = \frac{l}{\pi R} \sqrt[4]{\frac{R}{h} \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}; \quad (6.68)$$

$$q_{кр} = 2 \sqrt[4]{\frac{DEh}{R^2}} = \frac{Eh^2}{R} \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}. \quad (6.69)$$

При этом критическое осевое сжимающее напряжение (при $\mu = 0,3$)

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R} \approx 0,6E \frac{h}{R}. \quad (6.70)$$

Неосесимметричные формы потери устойчивости цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении, в классической постановке можно исследовать с помощью системы уравнений (6.39), которая при $T_x^0 = -q$, $T_y^0 = 0$, $S^0 = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0; \\ \frac{1}{Eh} \nabla^2\nabla^2 \Phi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Если для обоих торцов оболочки заданы граничные условия (6.52), то решение системы (6.71) можно найти в виде

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi;$$

$$\Phi = B \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi.$$

Подставив эти функции в систему уравнений (6.71) и сократив общий для всех слагаемых множитель $\sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi$, получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} A - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 B &= 0; \\ \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 A + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 B &= 0, \end{aligned}$$

Равенство нулю определителя этой системы приводит к собственным значениям нагрузки

$$q_{nm} = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta},$$

где

$$\eta = \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2.$$

При большом числе полуволн n или m комплекс η можно рассматривать как непрерывно изменяющийся параметр. Определяя условие минимума q_{nm} по этому параметру, снова приходим к формуле (6.69), причем критическое значение комплекса η равно

$$\eta_{кр} = \sqrt{\frac{Eh}{DR^2}} = \frac{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{hR}.$$

Заметим, что последнее выражение не дает конкретных значений $n_{кр}$ и $m_{кр}$, а только устанавливает некоторую связь между ними. Таким образом, критической точке бифуркации соответствует целая серия различных комбинаций чисел полуволн, по которым может происходить потеря устойчивости оболочки, включая $n_{кр} = 0$, т. е. осесимметричную форму потери устойчивости.

Итак, из приведенного решения следует, что начальное безмоментное напряженное состояние упругой идеально правильной цилиндрической оболочки с граничными условиями (6.52) становится неустойчивым, когда осевое сжимающее напряжение превысит значение

$$\sigma_{кр} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R}.$$

Суммарная критическая сжимающая сила

$$P_{кр} = 2\pi R \sigma_{кр} h = \frac{2\pi E h^3}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

не зависит от радиуса оболочки R , а определяется только толщиной оболочки h и упругими свойствами материала E и μ .

Как отмечалось, условия (6.52) — единственный вариант граничных условий, допускающих простое аналитическое решение задачи устойчивости цилиндрической оболочки. При других граничных условиях решение системы уравнений (6.71) даже при однородном безмоментном напряженном состоянии резко усложняется.

Долгое время решение Лоренца и Тимошенко оставалось единственным, описывающим потерю устойчивости упругой цилиндрической оболочки, равномерно сжатой в осевом направлении, и только недавно с помощью ЭЦВМ удалось сделать следующий шаг — рассмотреть задачу при произвольных граничных условиях с учетом неоднородного начального напряженно-деформированного состояния.

При произвольных граничных условиях и однородном безмоментом начальном состоянии критическую нагрузку можно вычислить следующим путем [19]. Исключив из системы уравнений (6.71) функцию усилий, эту систему можно свести к одному разрешающему уравнению относительно нормального прогиба w :

$$D\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Решение этого уравнения с постоянными коэффициентами найдем в виде $w = Ae^{rx} \sin n\varphi$.

Подстановка этой функции в разрешающее уравнение дает характеристическое уравнение восьмой степени относительно параметра r . Определив (для конкретных значений параметров оболочки, нагрузки и числа волн) восемь корней характеристического

уравнения r_i , которые могут быть вещественными, комплексными или мнимыми, получим выражение для поперечного прогиба

$$w = \sin n\varphi \sum_{i=1}^{i=8} A_i e^{r_i x}.$$

Выразив заданные на торцах оболочки однородные граничные условия (по четыре условия на каждом торце) через функцию w и подчинив последнее выражение этим граничным условиям, приходим к системе восьми однородных линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A_i . Условие обращения в нуль определителя этой системы уравнений позволяет найти собственные значения нагрузки q_{nm} . Перебирая различные значения числа волн в окружном направлении n , для каждой конкретной оболочки можно найти $n_{кр}$, приводящее к наименьшему собственному значению нагрузки $q_{кр}$. В таком решении машинный счет используется для определения корней характеристического уравнения и для раскрытия определителя восьмого порядка.

Как показали вычисления, выполненные рядом авторов, все варианты граничных условий (см. § 33) за исключением Γ_7 и Γ_8 для достаточно длинных оболочек приводят практически к тому же значению критической нагрузки, что и решение Лоренца и С. П. Тимошенко (примерно, начиная с $Z = 10$, где $Z = \frac{l}{R} \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}$). При граничных условиях Γ_7 и Γ_8 критическая нагрузка $q_{кр}$ оказывается в 2 раза меньшей: $q_{кр} = \frac{Eh^2}{2R\sqrt{3(1-\mu^2)}}$ (для достаточно длинных оболочек). В реальных конструкциях граничные условия Γ_7 и Γ_8 обычно не реализуются, поэтому полученные для них критические нагрузки большого практического значения не имеют. Таким образом, можно считать, что для идеально правильной достаточно длинной цилиндрической оболочки, находящейся в безмоментном начальном напряженном состоянии, критическое сжимающее напряжение $\sigma_{кр} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}$ практически не зависит от граничных условий.

Дальнейшие уточнения задачи устойчивости сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки связаны с учетом моментности ее начального напряженного состояния. Напомним, что в классической постановке начальное напряженное состояние оболочки считалось однородными и безмоментными. Граничные условия, рассматриваемые в решении, относились только к бифуркационным перемещениям и никак не учитывались в докритическом состоянии оболочки. При классической постановке как бы предполагалось, что в докритическом состоянии закрепления торцов оболочки не стесняют ее радиальных перемещений. Но в большинстве практических случаев нагружения цилиндрической оболочки радиальные перемещения на ее торцах бывают стеснены шпангоутами, днищами и т. д. Поэтому даже при равно-

мерном сжатии реальной оболочки в ней возникает начальное осесимметричное моментное напряженное состояние.

При решении задачи в обычной линейной постановке, когда уравнения равновесия формулируются для недеформированного элемента оболочки, начальный осесимметричный изгиб цилиндрической оболочки описывается уравнением (6.65) с учетом T_z^0 .

В интересующем нас случае нагружения оболочки $p_z = 0$ и $T_z^0 = -q$ и это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4k^4 w_0 = \mu \frac{q}{DR}, \quad (6.72)$$

где $w_0 = w_0(x)$ — докритический начальный прогиб; $k = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4R^3D}}$.

Решение уравнения (6.72) будет

$$w_0^* = w_0^* + e^{-kx} (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx) + e^{kx} (c_3 \sin kx + c_4 \cos kx),$$

где частное решение неоднородного уравнения w_0^* в рассматриваемом случае равно

$$w_0^* = \mu \frac{qR}{Eh}.$$

Постоянные c_i должны определяться из четырех граничных условий, задаваемых на торцах оболочки (по два на каждом из них). Но для не очень коротких оболочек решение существенно упрощается. Так, если $\frac{l}{R} > (2 \div 3) \sqrt{\frac{h}{R}}$, то взаимным влиянием закреплений торцов можно пренебречь и, помещая начало координат на одном из них, записать решение уравнения (6.72) для зоны вблизи этого торца в виде

$$w_0 = w_0^* + e^{-kx} (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx),$$

где c_1 и c_2 — постоянные, определяемые только из двух граничных условий при $x = 0$.

Например, если при $x = 0$ заданы граничные условия $w_0 = 0$ и $\frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0$, то вблизи этого торца

$$w_0 = \mu \frac{qR}{Eh} (1 - \cos kx) e^{-kx}.$$

Аналогичное решение уравнения (6.72) получается для зоны вблизи второго торца оболочки. Стеснение радиальных перемещений на торцах сжатой в осевом направлении оболочки приводит не только к изгибу образующих, но вызывает окружные начальные усилия, определяемые зависимостью

$$T_y^0 = \mu T_x^0 + Eh \frac{w_0}{R}.$$

Для определения критической осевой нагрузки цилиндрической оболочки, находящейся в моментном начальном состоянии, можно использовать систему уравнений, относящуюся к оболочке вращения, близкой к цилиндрической [23], и аналогичную системе (6.71). В данном случае эту систему уравнений запишем так:

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y^0 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \varphi^2} &= 0; \\ \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

где w_0 и T_y^0 определяются из решения уравнения (6.72).

Полученная система уравнений имеет переменные коэффициенты и ее решение целесообразно строить каким-либо численным методом. Для этого примем

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \sin n\varphi; \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) \sin n\varphi.$$

Таким образом, система уравнений в частных производных (6.73) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $w_n(x)$ и $\Phi_n(x)$, причем гармоники оказываются несвязанными, поэтому достаточно исследовать одну n -ю гармонику.

При заданных на торцах оболочки граничных условиях для $w_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ численное решение такой системы уравнений аналогично решению уравнения для стержня на упругом основании (см. § 15) и не вызывает принципиальных трудностей [12, 23].

Напомним, что выше начальный прогиб $w_0 = w_0(x)$ и начальное окружное усилие $T_y^0 = T_y^0(x)$ определены с использованием решения уравнения обычного линейного краевого эффекта. Такой краевой эффект не оказывает заметного влияния на критическую нагрузку, так как зона начального моментного состояния локализована вблизи закрепленных торцов, а амплитуда начального прогиба при нагрузках порядка критических невелика. Однако для сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки имеется одно обстоятельство, существенно увеличивающее влияние начального моментного напряженного состояния оболочки на критические нагрузки. Осевые усилия в цилиндрической оболочке могут заметно влиять на докритические прогибы w_0 , если абсолютные значения осевых усилий имеют порядок $q_{кр}$. Для выявления этого влияния при определении начального прогиба вместо линейного уравнения осесимметричного изгиба оболочки (6.65) следует использовать так называемое уравнение нелинейного осесимметричного краевого эффекта

$$D \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_0 - T_x^0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = p_z - \mu \frac{T_x^0}{R}. \quad (6.74)$$

Это линеаризованное неоднородное уравнение получается в результате составления условий равновесия для искривленного элемента оболочки (как и при выводе однородных линеаризованных уравнений устойчивости). В рассматриваемом случае $T_x^0 = -q$, $p_z = 0$ и уравнение (6.74) принимает вид

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4k^4 w_0 + 4k^2 \omega \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \mu \frac{q}{RD}, \quad (6.75)$$

где $\omega = \frac{q}{4k^2 D}$.

Решение полученного уравнения можно записать в следующей форме:

$$w_0 = w_0^* + c_1 \sin k_1 x \operatorname{sh} k_2 x + c_2 \cos k_1 x \operatorname{ch} k_2 x + \\ + c_3 \sin k_1 x \operatorname{ch} k_2 x + c_4 \cos k_1 x \operatorname{sh} k_2 x,$$

где $k_1 = k \sqrt{1 + \omega}$; $k_2 = k \sqrt{1 - \omega}$.

Частное решение w_0^* и параметр k определяются по тем формулам, которые использовались при решении линейного уравнения (6.72).

При малых (по сравнению с единицей) значениях параметра ω решение уравнения нелинейного краевого эффекта мало отличается от решения обычного линейного уравнения осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки. Но при приближении значения параметра ω к единице понятие «краевого эффекта» теряет силу, так как возмущения, возникающие у торцов оболочки, распространяются на расстояние, значительно превышающее зону обычного линейного краевого эффекта. При $\omega \rightarrow 1$ эти возмущения охватывают всю длину оболочки, а их амплитуды неограниченно возрастают.

Для исследования устойчивости такой осесимметричной изгибной формы равновесия цилиндрической оболочки можно воспользоваться системой уравнений (6.73), но величины $w_0 = w_0(x)$ и $T_y^0 = T_y^0(x)$ следует определить из решения уравнения нелинейного краевого эффекта.

Как показывают вычисления, до достижения значения $\omega = 1$ появляются неосесимметричные формы равновесия оболочки, смежные с исходной осесимметричной изгибной формой $w_0 = w_0(x)$. На рис. 6.21 показан график зависимости $\omega_{кр}$ от относительной длины оболочки при различных значениях коэффициента Пуассона μ (при граничных условиях Γ_a) [23]. В табл. 6.1. приведены взятые из той же работы значения $\omega_{кр}$ для различных граничных условий при $\mu = 0,3$.

Начальное моментное напряженное состояние снижает классическое критическое значение осевого сжимающего напряжения цилиндрической оболочки, причем в зависимости от граничных условий и коэффициента Пуассона μ это снижение критической нагрузки колеблется примерно от 0 до 20%. Таким образом, учет

граничных условий при определении начального моментного напряженно-деформированного состояния сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки вносит некоторую поправку в классическое решение.

Но решающая корректировка результата решения задачи устойчивости цилиндрической оболочки в классической постановке связана с учетом отклонений срединной поверхности реальной оболочки от идеально правильной цилиндрической формы, т. е. с учетом так называемых начальных неправильностей или начальных несовершенств. Впервые роль начальных неправильностей обсуждалась и оценивалась в работах Флюгге, Доннелла и несколько позже в ряде работ Койтера. Окончательная ясность в этот вопрос внесена сравнительно недавно благодаря работам различных авторов, использовавших машинный счет [23].

Наиболее четко прослеживается роль осесимметричных начальных неправильностей. В этом случае с помощью линеаризованных уравнений (6.73) можно найти то значение осевой сжимающей нагрузки, при превышении которой начальная осесимметричная форма равновесия цилиндрической оболочки перестает быть устойчивой. Для выявления качественной картины рассмотрим оболочку, имеющую в ненагруженном состоянии осесимметричный прогиб

$$w_{\text{нач}}(x) = f_{\text{нач}} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Если предположить, что $\mu = 0$ и закрепление торцов оболочки не стесняет докритических осесимметричных радиальных перемещений, то изгиб образующей при осесимметричных формах равновесия оболочки будет, очевидно, описываться уравнением (см. § 17)

$$D \frac{d^4 w_1}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_1 + q \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0,$$

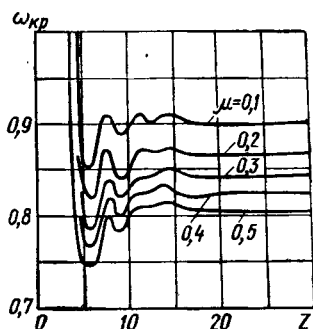


Рис. 6.21

Таблица 6.1

Граничные условия	Z_{∞}^*	ω_{∞}^*	$Z_{\min}$	$\omega_{\min}^*$
Γ_1	24	0,928	7	0,902
Γ_2	25	0,910		0,857
Γ_3	24	0,928		0,902
Γ_4	25	0,910		0,857
Γ_5	20	0,865	5,5	0,827
Γ_6	17	0,843	6	0,785
Γ_7	7	0,500	2,6	0,430
Γ_8				

Примечание. Z_{∞}^* — значение Z , при котором критический параметр осевого сжатия ω^* практически остается постоянным и равным ω_{∞}^* ; $Z_{\min}^*$ — значение Z , при котором достигается абсолютный минимум ω^* , равный $\omega_{\min}^*$.

где $\omega_1 = \omega_1(x)$ — дополнительный осесимметричный прогиб, появляющийся в результате нагружения оболочки осевым сжимающим усилием q ; $\omega_n = \omega_{\text{нач}} + \omega_1$ — полный прогиб осесимметрично нагруженной оболочки.

При граничных условиях Γ_6 решение уравнения дает

$$\omega_1(x) = \frac{f_{\text{нач}}}{\frac{q_m}{q} - 1} \sin \frac{\pi x}{l},$$

где

$$q_m = D \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2}.$$

Тогда полный докритический прогиб оболочки

$$\omega_n(x) = \frac{f_{\text{нач}}}{1 - \frac{q}{q_m}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Причем начальное окружное усилие при докритической осесимметричной форме равновесия оболочки, связанное с дополнительным прогибом $\omega_1(x)$, равно

$$T_y^0 = \frac{Eh}{R} \omega_1(x) = \frac{f_{\text{нач}}}{\frac{q_m}{q} - 1} \frac{Eh}{R} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Подставив эти значения $\omega_n(x) = \omega_0(x)$ и T_y^0 в систему уравнений (6.73) и решив ее численным методом, можно найти критическое значение $q_{\text{кр}}$ в зависимости от амплитуды начального прогиба. Аналогичный путь решения приводит к $q_{\text{кр}}$ и при других осесимметричных начальных прогибах $\omega_{\text{нач}} = \omega_{\text{нач}}(x)$.

Многочисленные результаты вычислений, проведенных рядом авторов, показали, что величина $q_{\text{кр}}$ чрезвычайно чувствительна к амплитуде и форме начальной осесимметричной неперпендикулярности оболочки. На рис. 6.22 показана зона, в которой лежат кривые, при различных законах $\omega_{\text{нач}}(x)$, характеризующие снижение критической нагрузки в зависимости от безразмерной амплитуды начального прогиба $\frac{w_{\text{max}}}{h}$. Для оболочки с начальной неперпендикулярностью формы $q_{\text{кр}}$ может оказаться в несколько раз меньше классического критического значения $q_{\text{кр}}^0 = \frac{Eh^3}{\sqrt{3(1-\mu^2)}R}$.

В реальной оболочке начальные неперпендикулярности могут быть различной формы, причем для тонких оболочек амплитуды и формы начальных непра-

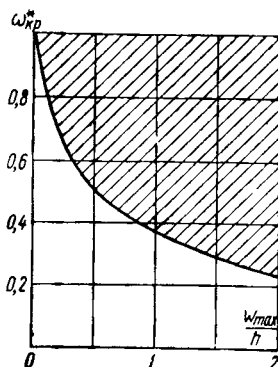


Рис. 6.22

вильностей — факторы трудноконтролируемые. Исследование влияния таких начальных неправильностей произвольной формы на критическую нагрузку цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении, становится практически неразрешимой проблемой. Причем для цилиндрической оболочки с начальными неправильностями неосесимметричной формы, кроме точек бифуркации, которые можно обнаружить с помощью линеаризованных уравнений типа (6.73), имеется серия различных предельных критических точек. Теоретическое их определение возможно только с позиций нелинейной теории.

§ 35. Об исследовании устойчивости цилиндрических оболочек с позиций нелинейной теории

В предыдущих главах показано, что критические точки бифуркации начальной формы равновесия идеально правильных стержней, пластин и круговых колец относятся к точкам бифуркации первого типа (см. § 3).

При нагрузках, меньших критических, стержень, пластина или круговое кольцо не имеют других состояний равновесия кроме невозмущенного устойчивого начального состояния (рис. 6.23, а). При достижении критической нагрузки наряду с начальным невозмущенным состоянием равновесия становятся возможными и новые возмущенные состояния равновесия. С дальнейшим увеличением нагрузки начальное состояние равновесия перестает быть устойчивым, взамен его появляется новое возмущенное состояние равновесия, в которое переходят стержень, пластинка или круговое кольцо (кривая A_1B на рис. 6.23, а). При плавном нарастании нагрузки упругий стержень, пластина или круговое кольцо иде-

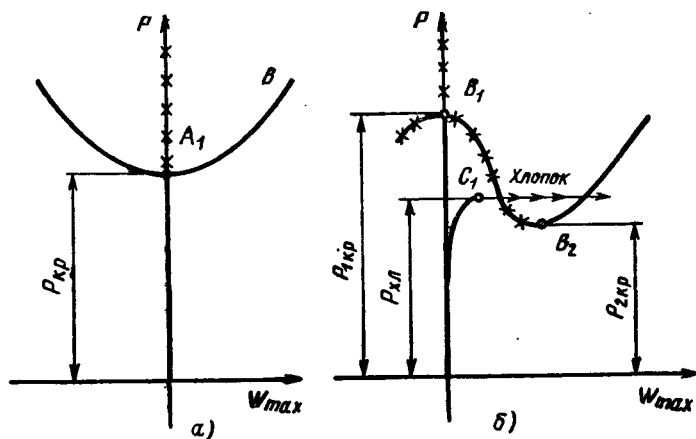


Рис. 6.23

ально правильной формы тоже плавно без перескоков и хлопков переходят в новое возмущенное устойчивое состояние равновесия.

Если закрепления краев упругой оболочки таковы, что допускают чисто изгибную деформацию оболочки без удлинений и сдвигов ее срединной поверхности, то оболочка тоже имеет критическую точку бифуркации первого типа и при потере устойчивости ведет себя аналогично сжатому стержню или круговому кольцу. В этом случае существует тоже только одно критическое значение нагрузки, при превышении которого оболочка плавно, без хлопков переходит в новое возмущенное состояние равновесия.

Если закрепления краев оболочки исключают возможность чисто изгибной деформации, то при потере устойчивости поведение тонких оболочек становится качественно иным. В этом случае критическая точка бифуркации B_1 идеально правильной оболочки оказывается точкой бифуркации второго типа [3, 19]. Точка бифуркации соответствует неустойчивому начальному состоянию равновесия и в окрестности критической точки бифуркации нет новых устойчивых состояний равновесия. Новые устойчивые состояния равновесия удалены от начального невозмущенного состояния на конечные расстояния (рис. 6.23, б). Поэтому переход в новое возмущенное состояние равновесия происходит хлопком: переходя в новое устойчивое состояние оболочка «перескакивает» через статически неустойчивые состояния равновесия. Новые устойчивые состояния равновесия, отделенные от начального невозмущенного состояния сравнительно небольшим энергетическим барьером, становятся возможными до достижения критической нагрузки.

В результате геометрических несовершенств и не строго осесимметричного нагружения реальная оболочка начинает отклоняться от своей исходной формы. Затем при некотором значении нагрузки хлопок переходит в новое состояние равновесия (ср. с поведением упругой системы, рассмотренной в гл. 1).

Поэтому для тонких упругих оболочек характерны три значения внешней нагрузки:

$P_{1кр}$ — верхняя критическая нагрузка, при превышении которой начальная форма равновесия 'идеально правильной оболочки перестает быть устойчивой;

$P_{2кр}$ — нижняя критическая нагрузка, при превышении которой становятся возможными новые отличные от начального состояния равновесия оболочки идеально правильной формы;

$P_{хл}$ — нагрузка, при которой происходит хлопок реальной оболочки, т. е. то критическое значение нагрузки, при достижении которого начальное состояние равновесия реальной оболочки перестает быть устойчивым.

Значение верхней критической нагрузки определяют с помощью линеаризованных дифференциальных уравнений; при осесимметричном нагружении решение таких уравнений для цилиндрических оболочек не представляет принципиальных трудностей.

При определении нижних критических нагрузок необходимо решать чрезвычайно сложные задачи нелинейной теории оболочек. Эти уравнения не удается решить точно, поэтому все имеющиеся результаты получены приближенными методами.

Для реальной оболочки $P_{хл}$ обычно лежит между верхним и нижним критическими значениями идеально правильной оболочки, и чем точнее изготовлена оболочка, тем оно ближе к верхнему критическому значению. Значение $P_{хл}$ чрезвычайно чувствительно к величинам и формам начальных неправильностей. С одной стороны, это приводит к большому разбросу экспериментальных значений $P_{хл}$, полученных в различных условиях, с другой стороны, возникают принципиальные трудности и при теоретическом определении $P_{хл}$, так как для определения $P_{хл}$ данной реальной оболочки необходимо с большой точностью знать ее начальные неправильности, что практически неосуществимо.

Недавно считали, что выходом из такого положения является расчет конструкций по нижним критическим нагрузкам. Многие исследователи выполнили трудоемкие вычисления для уточнения значений нижних критических нагрузок. Но следует согласиться с авторами работы [24], отметившими следующее: «Усилия, предпринятые для отыскания нижних критических нагрузок оболочек не окупились, и эта идея должна быть оставлена».

На практике следует стремиться к созданию таких силовых конструкций, устойчивость которых не будет зависеть от случайных и трудно контролируемых факторов. Основные пути создания таких оболочечных конструкций — это использование подкрепленных силовым набором оболочек, трехслойных оболочек, гофрированных оболочек и т. д. В некоторых наиболее ответственных случаях применяют точеные однослойные оболочки.

Использование полубезмоментной теории В. З. Власова

Одна из характерных особенностей тонких упругих оболочек заключается в том, что значения критических нагрузок чрезвычайно чувствительны к различного рода случайным, трудноконтролируемым возмущениям. Для тонких оболочек только в уникальных, с особой тщательностью поставленных экспериментах удастся достичь близкого совпадения теоретических и экспериментальных значений критических нагрузок. В обычных условиях всегда наблюдается значительный разброс экспериментальных данных и заметное отклонение их средних значений от теоретически установленных значений критических нагрузок.

Поэтому при проектировании реальных конструкций не так важно точно знать теоретическое значение критической нагрузки идеально правильной оболочки, как четко представлять основные факторы, и их влияние на это значение. В этом отношении приближенное аналитическое решение, дающее простую расчетную формулу и правильно отражающее влияние основных факторов, может оказаться полезнее точного численного решения. Для ряда задач устойчивости изотропных и ортотропных оболочек полубезмоментная теория дает возможность построить такое упрощенное аналитическое решение, достаточно точно отражающее существо задачи.

§ 36. Основные зависимости полубезмоментной теории

Известны две трактовки полубезмоментной теории цилиндрических оболочек В. З. Власова. Согласно трактовке В. З. Власова уравнения полубезмоментной теории выводят для идеализированной ортотропной оболочки, наделенной определенными жесткостными характеристиками, а затем показывают, что в ряде случаев эти уравнения достаточно полно описывают поведение реальных ортотропных и изотропных оболочек. Общим недостатком такой трактовки вывода основных уравнений «...является значительное количество произвольных допущений» [28].

Согласно другой более современной трактовке уравнения полубезмоментной теории получают из общих уравнений цилиндри-

ческой оболочки путем их упрощения, базирующегося на единственном «...более глубоком и общем принципе. Можно показать, что таким единственным принципом, достаточным для обоснования уравнений полубезмоментной теории, является пренебрежение $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 f}{R^2 \partial \varphi^2}$, где f — любая, характерная для данной задачи функция: перемещение, усилие, момент» [28].

Несмотря на большую общность и стройность, такая трактовка является менее наглядной; кроме того, она менее удобна при формулировке граничных условий. Поэтому при выводе основных зависимостей полубезмоментной теории применительно к задачам устойчивости воспользуемся трактовкой В. З. Власова.

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, упругие свойства которой заданы соотношениями

$$\begin{aligned} T_x &= B_x \varepsilon_x; \\ M_\varphi &= D_\varphi \kappa_\varphi, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $B_x = B_x(x)$ — жесткость оболочки на растяжение-сжатие в осевом направлении, $D_\varphi = D_\varphi(x)$ — изгибная жесткость оболочки в окружном направлении.

Осевое удлинение ε_x и изменение кривизны κ_φ определяются обычными линейными зависимостями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \kappa_\varphi &= \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{R^2 \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Осевые изгибающие моменты M_x и скручивающие моменты $M_{x\varphi}$ считают пренебрежимо малыми и в решении не учитывают.

Кроме того, предполагают, что деформация оболочки происходит без окружных удлинений и сдвигов срединной поверхности, т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} = 0; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Если такая оболочка нагружена поверхностными усилиями, интенсивность которых p_x, p_φ, p_z , то полная потенциальная энергия

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \iint (B_x \varepsilon_x^2 + D_\varphi \kappa_\varphi^2) R d\varphi dx - \\ &- \iint (p_x u + p_\varphi v + p_z w) R d\varphi dx. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В положении равновесия полная потенциальная энергия оболочки стационарна ($\delta\mathcal{E} = 0$). Поскольку перемещения u , v , w не являются независимыми, а связаны условием равенства нулю окружных удлинений и углов сдвига в срединной поверхности (7.3), для определения условий стационарности полной потенциальной энергии воспользуемся методом множителей Лагранжа (см. приложение II). В соответствии с этим методом найдем условия стационарности вспомогательного функционала

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^* = & \frac{1}{2} \iint (B_x e_x^2 + D_\varphi \kappa_\varphi^2) R d\varphi dx - \\ & - \iint (p_x u + p_\varphi v + p_z w) R d\varphi dx + \\ & + \iint \left[\lambda_e \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} \right) + \lambda_\gamma \left(\frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] R d\varphi dx,\end{aligned}$$

где λ_e и λ_γ — функциональные множители Лагранжа.

Приравнявая нулю первую вариацию вспомогательного функционала $\mathcal{E}^*$ и учитывая зависимости (7.2), получим

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}^* = & \iint \left[B_x \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + D_\varphi \kappa_\varphi \delta \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} \right) - \right. \\ & - D_\varphi \kappa_\varphi \delta \left(\frac{\partial v}{R^2 \partial \varphi} \right) \left. \right] R d\varphi dx - \iint (p_x \delta u + p_\varphi \delta v + p_z \delta w) R d\varphi dx + \\ & + \iint \left\{ \lambda_e \left[\frac{\delta w}{R} + \delta \left(\frac{\partial v}{R \partial \varphi} \right) \right] + \lambda_\gamma \left[\delta \left(\frac{\partial u}{R \partial \varphi} \right) + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} R d\varphi dx = 0.\end{aligned}$$

Используя формулы интегрирования по частям и учитывая условие замкнутости оболочки в окружном направлении, последнее выражение преобразуем, причем в соответствии с (7.1) в подинтегральном выражении заменим $B_x \frac{\partial u}{\partial x}$ и $D_\varphi \kappa_\varphi$ на T_x и M_φ .

Тогда

$$\begin{aligned}\iint \left[\left(-\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_\gamma}{R \partial \varphi} - p_x \right) \delta u + \left(-\frac{\partial \lambda_e}{R \partial \varphi} - \frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial M_\varphi}{R^2 \partial \varphi} - p_\varphi \right) \delta v + \right. \\ \left. + \left(\frac{\lambda_e}{R} + \frac{\partial^2 M_\varphi}{R^2 \partial \varphi^2} - p_z \right) \delta w \right] R d\varphi dx + T_x \delta u \Big|_0^l + \lambda_\gamma \delta v \Big|_0^l = 0,\end{aligned}$$

Откуда следует система уравнений

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_\gamma}{R \partial \varphi} + p_x &= 0; \\ \frac{\partial \lambda_e}{R \partial \varphi} + \frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial x} - \frac{\partial M_\varphi}{R^2 \partial \varphi} + p_\varphi &= 0; \\ \frac{\lambda_e}{R} + \frac{\partial^2 M_\varphi}{R^2 \partial \varphi^2} &= p_z,\end{aligned}\right\} \quad (7.5)$$

а также возможные комбинации граничных условий на торцах оболочки. При $x = 0$ и $x = l$ может быть задано:

$$\begin{aligned} T_x = 0 \text{ либо } \delta u = 0, \text{ т. е. } u = \tilde{u} = \text{const}; \\ S = 0 \text{ либо } \delta v = 0, \text{ т. е. } v = \bar{v} = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

В рассматриваемой задаче, как нетрудно заметить, множители Лагранжа имеют простой физический смысл: $\lambda_\epsilon = T_\Phi$ и $\lambda_\gamma = S$, т. е. λ_ϵ равно окружному усилию, а λ_γ сдвигающему усилию в срединной поверхности оболочки. Поэтому входящий в граничные условия множитель Лагранжа λ_γ можно заменить на S .

Исключая из системы уравнений (7.5) λ_ϵ и λ_γ приходим к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^4 M_\Phi}{\partial \Phi^4} + \frac{\partial^2 M_\Phi}{\partial \Phi^2} \right) = \frac{\partial^2 p_z}{R \partial \Phi^2} + \frac{\partial p_\Phi}{R \partial \Phi} - \frac{\partial p_x}{\partial x}. \quad (7.7)$$

Условия равенства нулю окружных удлинений ϵ_Φ и углов сдвига γ будут удовлетворены тождественно, если введем функцию перемещений Φ с помощью соотношений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u; \quad \frac{\partial \Phi}{R \partial \Phi} = -v; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial \Phi^2} = w. \quad (7.8)$$

Тогда

$$T_x = B_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad M_\Phi = \frac{D_\Phi}{R^3} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \Phi^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Phi^2} \right). \quad (7.9)$$

Из уравнения (7.7) получим разрешающее уравнение полубезмоментной теории

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{D_\Phi}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \Phi^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \Phi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \Phi^4} \right) = \\ = \frac{\partial^2 p_z}{R \partial \Phi^2} + \frac{\partial p_\Phi}{R \partial \Phi} - \frac{\partial p_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Если функцию перемещений Φ искать в виде произведения $\Phi = XY$, где $X = X(x)$ — функция координаты x ; $Y = Y(\Phi)$ — функция координаты Φ , удовлетворяющая условию замкнутости оболочки в окружном направлении, то граничные условия (7.6) трансформируются в следующие. При $x = 0$ и $x = l$ могут быть заданы

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \text{ либо } \frac{dX}{dx};$$

$$\frac{d^3 X}{dx^3} \text{ либо } X.$$

Для получения однородного уравнения, описывающего потерю устойчивости оболочки, воспользуемся приемом фиктивной на-

грузки. При нагружении оболочки только внешним гидростатическим давлением p и контурными усилиями поперечная фиктивная нагрузка ($T_\varphi^0 = -pR$)

$$p_z^\phi = -pR\kappa_\varphi + T_x^0\kappa_x + 2S^0\kappa_{x\varphi},$$

где T_x^0 , S^0 — начальные осевое и сдвигающее усилия в срединной поверхности оболочки, которые считаем известными из решения вспомогательной задачи. Величины κ_φ , κ_x , $\kappa_{x\varphi}$, определяемые из формул (6.23), выразим через функцию перемещений Φ . В результате этого получим

$$p_z^\phi = -\frac{p}{R^2} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + T_x^0 \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^2 \partial x^2} + 2S^0 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^3 \partial x}.$$

Положив в разрешающем уравнении (7.10) $p_x = 0$, $p_\varphi = 0$ и заменив p_z на полученное значение фиктивной нагрузки p_z^ϕ , придем к однородному уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{D_\varphi}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) + \\ & + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[p \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \right] - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(T_x^0 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^2 \partial x^2} \right) - \\ & - \frac{2}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(S^0 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^2 \partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

и однородным граничным условиям на торцах: при $x = 0$ и $x = l$ могут быть заданы

$$T_x = 0 \text{ либо } u = 0;$$

$$S = 0 \text{ либо } v = 0. \quad (7.12)$$

Полубезмоментной теорией можно пользоваться при расчете на устойчивость произвольно нагруженной цилиндрической оболочки. Однако эта теория наиболее эффективна при расчете на устойчивость цилиндрической оболочки при осесимметричном гидростатическом давлении. Рассмотрим эту задачу детальнее.

Начальное напряженное состояние полубезмоментной цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметричным внешним давлением $p = p(x)$, является безмоментным независимо от закрепления торцов, поскольку схема полубезмоментной оболочки исключает осесимметричный краевой эффект. Но как отмечено в § 34, влияние осесимметричного краевого эффекта на критическое давление обычно невелико.

Разрешающее однородное уравнение (7.11) при $T_x^0 = 0$ и $S^0 = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{D_\varphi}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) + \\ & + \frac{p}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения для замкнутой цилиндрической оболочки можно искать в виде

$$\Phi = X \sin n\varphi, \quad (7.13)$$

где $X = X(x)$.

Подставив значение Φ в разрешающее уравнение и сократив общий множитель $\sin n\varphi$, получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$(B_x X'')'' + \frac{D_\Phi}{R^6} n^4 (n^2 - 1)^2 X - \frac{p}{R^3} n^4 (n^2 - 1) X = 0, \quad (7.14)$$

где $B_x = B_x(x)$, $D_\Phi = D_\Phi(x)$, $p = p(x)$; штрихом обозначено дифференцирование по x .

Однородные граничные условия этого уравнения определяются зависимостями (7.12). При постоянных жесткостях B_x , D_Φ и постоянном по длине оболочке давлении p решение уравнения (7.14) легко получить в аналитическом виде. Если коэффициенты уравнения переменны, то решение можно получить любым численным методом.

Заметим, что когда функция перемещений Φ взята в виде (7.13), то в соответствии с зависимостями (7.8) и уравнениями (7.5) имеем

$$u = X' \sin n\varphi; \quad v = -\frac{n}{R} X \cos n\varphi; \quad (7.15)$$

$$T_x = B_x X'' \sin n\varphi; \quad S = \frac{R}{n} (B_x X'')' \cos n\varphi.$$

При решении задачи устойчивости методом начальных параметров, воспользовавшись матричной формой записи уравнения (7.14), получим

$$y' = Ay, \quad (7.16)$$

где

$$y = \begin{bmatrix} X \\ X' \\ B_x X'' \\ (B_x X'')' \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \eta^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\eta^4 = \frac{1}{R^3} \left[p - \frac{D_\Phi}{R^3} (n^2 - 1) \right] n^4 (n^2 - 1).$$

Дальнейшее решение не отличается от решения методом начальных параметров задачи устойчивости прямого стержня (см. гл. 3).

Это основной вариант полубезмоментной теории, когда упругие свойства ортотропной цилиндрической оболочки описываются двумя характеристиками: жесткостью оболочки на растяжение-сжатие в осевом направлении B_x и изгибной жесткостью в окружном направлении D_φ . Для расчета на устойчивость точность этого варианта обычно достаточна. В тех случаях, когда оболочка обладает малой жесткостью на сдвиг в срединной поверхности, для решения задач устойчивости можно воспользоваться уточненным вариантом полубезмоментной теории, в котором учитываются деформации сдвига в срединной поверхности оболочки. В этом варианте полубезмоментной теории упругие свойства ортотропной цилиндрической оболочки вместо соотношений (7.1) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} T_x &= B_x \varepsilon_x; \\ S &= B_{x\varphi} \gamma; \\ M_\varphi &= D_\varphi \kappa_\varphi, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где $B_{x\varphi}$ — дополнительно учитываемая жесткость оболочки на сдвиг, причем

$$\gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7.18)$$

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, которые аналогичны приведенным выше, отметим, что вместо одного уравнения (7.7) можно получить систему двух уравнений (при $p_x = 0$, $p_\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{B_x}{B_{x\varphi}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x R \partial \varphi} &= 0; \\ \frac{B_x}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{D_\varphi}{R^3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi} \right) &= \frac{\partial^2 p_z}{R^3 \partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Однородные граничные условия, как и в основном варианте полубезмоментной теории, могут быть заданы в следующем виде: при $x = 0$ и $x = l$

$$\begin{aligned} T_x &= 0 \text{ либо } u = 0; \\ S &= 0 \text{ либо } v = 0. \end{aligned}$$

Заменив p_z^0 на $p_z^\Phi = -p R \kappa_\varphi + T_x^0 \kappa_x + 2 S^0 \kappa_{xy}$, получим систему однородных уравнений, описывающих потерю устойчивости оболочки. В частности, при $T_x^0 = 0$, и $S^0 = 0$ и $p = p(x)$ решение этой системы однородных уравнений можно найти в виде

$$\begin{aligned} u &= U \sin n\varphi; \\ v &= V \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где $U = U(x)$, $V = V(x)$ — функции координаты x .

При постоянных коэффициентах системы уравнений (7.19) и $T_x^0 = 0$, $S = 0$ дальнейшее решение удобнее вести с помощью одного разрешающего уравнения

$$R^4 V^{IV} + R^2 \frac{\lambda^4}{n^2} \frac{B_x}{B_{x\Phi}} V'' - \lambda^4 V = 0, \quad (7.21)$$

где

$$\lambda^4 = \left[p - \frac{D_\Phi (n^2 - 1)}{R^3} \right] \frac{n^4 (n^2 - 1) R}{B_x}.$$

При переменных коэффициентах решение можно получить по схеме, которая намечена выше для расчета на устойчивость ортотропной оболочки без учета угла сдвига в ее срединной поверхности.

Схему полубезмоментной цилиндрической оболочки можно использовать и в случае конической ортотропной оболочки [32].

§ 37. Устойчивость ортотропной оболочки при внешнем давлении

В предыдущей главе рассмотрено влияние условий закреплений торцов цилиндрической оболочки на критические нагрузки. Как подчеркивалось, даже при осесимметричном начальном напряженном состоянии интегрирование общих уравнений устойчивости оболочек при произвольных граничных условиях требует машинного счета.

Использование уравнений полубезмоментной теории для основных вариантов граничных условий позволяет получить элементарное аналитическое решение, полностью объясняющее качественные особенности зависимости критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий и дающее достаточно надежные количественные результаты для изотропной и ортотропной оболочек в широком диапазоне изменения их параметров [4].

При $p = \text{const}$, $B_x = \text{const}$ и $D_\Phi = \text{const}$ уравнение (7.14) запишем в следующем виде:

$$X^{IV} - \frac{\lambda^4}{R^4} X = 0, \quad (7.22)$$

где

$$\lambda_4 = \frac{R}{B_x} n^4 (n^2 - 1) \left[p - \frac{D_\Phi}{R^3} (n^2 - 1) \right].$$

Однородные граничные условия при $x = 0$ и $x = l$:

$$\begin{aligned} X'' &= 0 \text{ либо } X' = 0; \\ X''' &= 0 \text{ либо } X = 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по x . Обратим внимание на то, что уравнение (7.22) и граничные условия (7.23) полностью совпадают с хорошо изученным уравнением и граничными условиями свободно колеблющейся однородной балки. Решение уравнения (7.22) при $\lambda^4 > 0$:

$$X = A_1 \sin \frac{\lambda x}{R} + A_2 \cos \frac{\lambda x}{R} + A_3 \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{R} + A_4 \operatorname{ch} \frac{\lambda x}{R}. \quad (7.24)$$

Четыре однородных граничных условия (по два на каждом из торцов оболочки) составляют систему четырех однородных линейных уравнений относительно постоянных A_i . Условие обращения в нуль определителя этой алгебраической системы уравнений приводит к характеристическому уравнению, наименьший корень которого λ_1 позволяет определить собственные значения давления

$$p_n = \frac{B_x}{R} \frac{\lambda_1^4}{n^4 (n^2 - 1)} + \frac{D_\Phi}{R^3} (n^2 - 1); \quad n = 2, 3, \dots \quad (7.25)$$

В данном случае λ_1 не зависит от числа волн в окружном направлении n . (Собственные значения, соответствующие остальным корням λ_i характеристического уравнения для определения критического значения давления, интереса не представляют). Подбирая число волн $n_{\text{кр}}$ из условия минимума p_n , приходим к критическому значению давления $p_{\text{кр}}$ (см. § 33). При достаточно большом числе волн в окружном направлении, когда можно принять $n_{\text{кр}}^2 \gg 1$, выражение для $p_{\text{кр}}$ существенно упрощается (практически это можно сделать при $n_{\text{кр}} \gg 3$). Рассматривая величину n^2 как непрерывно меняющийся параметр, из условия минимума p_n находим

$$n_{\text{кр}}^2 = \lambda_1 \sqrt[4]{\frac{B_x}{R} \frac{3R^3}{D_\Phi}}; \quad (7.26)$$

$$p_{\text{кр}} = 4\lambda_1 \left(\frac{B_x}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_\Phi}{3R^3} \right)^{3/4}. \quad (7.27)$$

Рассмотрим несколько вариантов граничных условий, заданных на торцах цилиндрической оболочки.

1. На обоих торцах оболочки заданы граничные условия

$$\text{а) } X = 0; \quad \text{б) } X'' = 0. \quad (7.28)$$

В соответствии с зависимостями (7.15) это означает, что на обоих торцах запрещены окружные перемещения v и разрешены осевые перемещения u . В силу нерастяжимости полубезмоментной оболочки в окружном направлении (7.3) равенство нулю окружных перемещений v влечет за собой равенство нулю нормальных перемещений w .

В рассматриваемом случае первой собственной функцией уравнения (7.22) будет (аналог рассматриваемой задачи — сво-

бно колеблющаяся однородная балка с шарнирно-опертыми концами)

$$X = \sin \frac{\lambda_1 x}{R} = \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Наименьшее собственное значение $\lambda_1 = \frac{\pi R}{l}$ приводит к выражению, позволяющему после минимизации по числу волн n подсчитать критическое давление

$$\rho_n = \frac{D_\Phi (n^2 - 1)}{R^3} + \frac{B_x}{R} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^4. \quad (7.29)$$

В частности, используя формулы (7.26) и (7.27) для оболочек средней длины, находим

$$(n_{\text{кр}}^0)^2 = \frac{\pi R}{l} \sqrt[4]{\frac{B_x}{R} \frac{3R^3}{D_\Phi}}$$

и

$$\rho_{\text{кр}}^0 = 4 \frac{\pi R}{l} \left(\frac{B_x}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_\Phi}{3R^3} \right)^{3/4}. \quad (7.30)$$

Если положить

$$B_x = Eh; \quad D_\Phi = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

то формула (7.30) совпадает с формулой П. Ф. Папковича для изотропной оболочки средней длины.

2. На обоих торцах оболочки задано

$$\text{а) } X = 0; \quad \text{б) } X' = 0.$$

Таким образом, при $x = 0$ и $x = l$ запрещены окружные (следовательно, нормальные) и осевые перемещения оболочки. Аналог этой задачи — свободные колебания однородной балки с обоими зашлепленными концами. Первая собственная функция X_1 и соответствующее наименьшее собственное значение λ_1 будут:

$$\begin{aligned} X_1 = & \sin \frac{\lambda_1 x}{R} - \text{sh} \frac{\lambda_1 x}{R} - \\ & - \frac{\sin \frac{\lambda_1 l}{R} - \text{sh} \frac{\lambda_1 l}{R}}{\cos \frac{\lambda_1 l}{R} - \text{ch} \frac{\lambda_1 l}{R}} \left(\cos \frac{\lambda_1 x}{R} - \text{ch} \frac{\lambda_1 x}{R} \right); \\ \lambda_1 = & 4,37 \frac{R}{l} = 1,5 \frac{\pi R}{l}. \end{aligned}$$

При достаточно большом числе волн n из (7.27) получим

$$\rho_{\text{кр}} = 1,5 \rho_{\text{кр}}^0, \quad (7.31)$$

где $p_{кр}^0$ определяется по формуле (7.30). Иначе говоря, при рассматриваемых граничных условиях критическое давление оболочки средней длины в полтора раза больше, чем при граничных условиях (7.28).

3. Несимметричные граничные условия:

$$а) X(0) = 0; \quad б) X'(0) = 0;$$

$$в) X''(l) = 0; \quad г) X'''(l) = 0.$$

На одном краю оболочки при $x = 0$ запрещены окружные (и нормальные) и осевые перемещения; второй край полностью свободен, т. е. при $x = l$ $T_x = 0$ и $S = 0$. Аналог этой задачи — свободные колебания однородной консольно-зашемленной балки. Первая собственная функция X_1 и наименьшее собственное значение λ_1 определяются зависимостями

$$X_1 = \sin \frac{\lambda_1 x}{R} - \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 x}{R} - \\ - \frac{\sin \frac{\lambda_1 l}{R} + \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 l}{R}}{\cos \frac{\lambda_1 l}{R} + \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 l}{R}} \left(\cos \frac{\lambda_1 x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 x}{l} \right);$$

$$\lambda_1 = 1,87 \frac{R}{l} = 0,6 \frac{\pi R}{l}.$$

Из формулы (7.27) получим (при $n_{кр}^2 \gg 1$)

$$p_{кр} = 0,6 p_{кр}^0. \quad (7.32)$$

Аналогично можно найти собственные функции X_1 и критические давления при других граничных условиях на торцах оболочки.

Изложенная схема решения позволяет сравнительно просто исследовать влияние упругого закрепления краев оболочки на критические нагрузки. Общее уравнение (7.22) и его решение (7.24) остаются справедливыми и в этом случае, а жесткость упругого закрепления края оболочки входит в граничные условия. Рассмотрим случай, когда край оболочки упруго закреплен относительно осевых перемещений u , причем c — жесткость упругого закрепления. Тогда на краю оболочки можно задать:

$$1) T_x = cu; \quad 2) V = 0 \quad \text{либо} \quad S = 0.$$

Соответственно вместо граничных условий (7.23) получим:

$$1) X'' = -\frac{c}{B_x} X'; \quad 2) X = 0 \quad \text{либо} \quad X''' = 0.$$

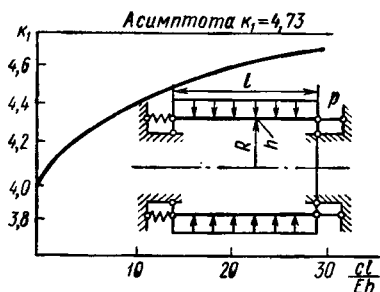


Рис. 7.1

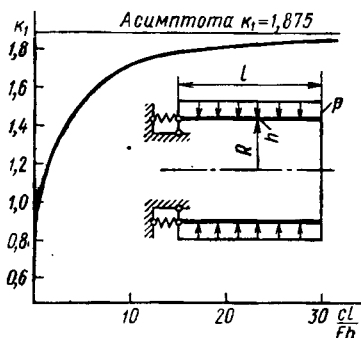


Рис. 7.2

Приведем примеры использования граничных условий упругого закрепления края оболочки.

$$4. \text{ При } x=0 \quad X=0; \quad X'' = \frac{c}{B_x} X';$$

$$\text{при } x=l \quad X=0; \quad X' = 0.$$

Один край оболочки закреплен жестко относительно окружных (и нормальных) перемещений и упруго относительно осевых, другой — жестко относительно всех перемещений. В этом случае наименьшее собственное значение $\lambda_1 = k_1 \frac{R}{l}$, где k_1 — коэффициент, зависящий (при $B_x = Fh$) от относительной жесткости упругого закрепления $\bar{c} = \frac{cl}{B_x}$ (рис. 7.1). При известном значении λ_1 критическое давление подсчитывают по формуле (7.25) либо (7.27).

$$5. \text{ При } x=0 \quad X=0; \quad X = \frac{c}{Eh} X';$$

$$\text{при } x=l \quad X'' = 0; \quad X''' = 0.$$

Это означает, что один край оболочки закреплен жестко относительно окружного (и нормального) перемещения и упруго относительно осевого, другой край — полностью свободен. В этом случае несложные выкладки приводят к характеристическому уравнению

$$\bar{c} = \frac{cl}{B_x} = k \frac{\text{ch } k \sin k - \text{sh } k \cos k}{1 + \cos k \text{ ch } k}. \quad (7.33)$$

Зависимость наименьшего корня этого уравнения k_1 от относительной жесткости упругого закрепления края оболочки $\bar{c} = \frac{cl}{B_x}$ приведена на рис. 7.2, причем первое собственное значение

$\lambda_1 = k_1 \frac{R}{l}$. Как показано на графике, в области малых значений относительно жесткости упругого основания происходит чрезвычайно резкое изменение значений коэффициента k_1 (следовательно, и первого собственного значения λ_1). В этой области при $\bar{c} \ll 1$ правую часть характеристического уравнения (7.33) удобнее разложить в ряд по степеням k_1 . Тогда, оставляя члены, содержащиеся в низших степенях k_1 , получаем

$$\frac{cl}{Bx} = \frac{2}{3} k_1^4.$$

Из выражения (7.25) приходим к зависимости

$$p_n = \frac{3}{2} \frac{c}{n^4(n^3-1)} \frac{R^3}{l^3} + (n^2-1) \frac{D_\Phi}{R^3},$$

где число волн $n_{кр}$ следует подбирать из условия минимума p_n . В частности, при $c = 0$ получим $n_{кр} = 2$, и из последней зависимости следует, что

$$p_{кр} = \frac{3D_\Phi}{R^3}. \quad (7.34)$$

Таким образом, полубезмоментная оболочка с одним свободно опертым краем, а другим полностью свободным теряет устойчивость так же, как длинная оболочка или оболочка с обоими свободными краями, т. е. без растяжения срединной поверхности (см. § 33).

Сравним степень влияния жесткости упругого закрепления края оболочки на критическое давление в двух последних примерах. В первом из них относительная жесткость порядка $\bar{c} \approx 1$ практически не влияет на критическое давление. Во втором примере влияние относительной жесткости порядка $\bar{c} = 10^{-3} \div 10^{-2}$ оказывается существенным. Причем в первом примере с увеличением относительной жесткости $\bar{c}$ от нуля до $\bar{c} = (25 \div 30)$ критическое давление повышается примерно на 25%. При дальнейшем увеличении относительной жесткости критическое давление практически не изменяется. В этом случае край оболочки можно считать закрепленным неподвижно. Во втором примере увеличение относительной жесткости упругого закрепления может привести к повышению критического давления в десятки раз. Такая качественная разница объясняется следующим. В первом из этих примеров при $\bar{c} = 0$ и $\bar{c} \neq 0$ оболочка с обоими краями, закрепленными относительно нормальных перемещений, не может деформироваться без растяжения срединной поверхности. Поэтому упругое закрепление края оболочки приводит к некоторому повышению критического давления, не меняя качественно характера деформирования оболочки при потере устойчивости. Во вто-

ром примере при $c = 0$ оболочка допускает чисто изгибные деформации без растяжений срединной поверхности; критическое давление зависит только от изгибной жесткости оболочки и определяется формулой (7.34). При упругом закреплении края оболочки невозможна чисто изгибная деформация. Этим объясняется тот факт, что даже при сравнительно небольшой относительной жесткости c качественно изменяется характер деформирования при потере устойчивости оболочки со свободным краем.

В заключение отметим, что в последнем примере для относительно коротких оболочек при $\dot{c} = 0$ применение схемы полубезмоментной оболочки необоснованно. В этом случае при $\lambda_1 = 0$ потеря устойчивости происходит по форме, описываемой следующими функциями перемещений (с точностью до масштаба A):

$$w = Ax \sin n\varphi; \quad v = A \frac{1}{n} x \cos n\varphi; \quad u = -A \frac{R}{n^2} \sin n\varphi.$$

Для изотропной оболочки скручивающий момент M_{xy} оказывается того же порядка, что и окружной изгибающий момент M_φ . Критическое значение внешнего давления не трудно найти если отказаться от схемы полубезмоментной оболочки и воспользоваться общими зависимостями, приведенными в § 32. Подсчитав изменение полной потенциальной энергии оболочки $\Delta\mathcal{E}$, из условия $\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$ можно получить окончательную формулу

$$p_n = \frac{(n^2 - 1) D}{R^3} \left[1 + \frac{6(1 - \mu)}{n^2} \frac{R^2}{l^2} \right].$$

Откуда при $n_{кр} = 2$ следует, что

$$p_{кр} = \frac{3D}{R^3} \left[1 + \frac{3(1 - \mu)}{2} \frac{R^2}{l^2} \right].$$

Как и следовало ожидать, для длинных оболочек эта формула совпадает с формулой (7.34).

§ 38. Устойчивость оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами

Задачу устойчивости оболочки, подкрепленной шпангоутами, можно решать в двух основных вариантах: с помощью замены подкрепленной оболочки однородной ортотропной оболочкой (путем «размазывания» жесткостей шпангоутов) или с учетом дискретного расположения подкреплений путем интегрирования уравнений устойчивости гладкой оболочки и выполнения условий стыковки ее со шпангоутами. Использование схемы полубезмоментной оболочки позволяет в обоих случаях получить простые и надежные приближенные решения [5].

Устойчивость однородной ортотропной оболочки рассмотрена в предыдущем параграфе. Сейчас решим задачу устойчивости обо-

лочки с учетом дискретного расположения подкреплений. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, подкрепленную несколькими упругими шпангоутами и нагруженную равномерным внешним гидростатическим давлением p . Исследуем устойчивость такой оболочки при следующих допущениях:

1. Поведение обшивки описывается уравнениями полубезмоментной теории.

2. Центры тяжести поперечных сечений шпангоутов лежат в срединной поверхности обшивки; оси шпангоутов нерастяжимы.

3. В решении учитываем только изгибную жесткость шпангоута в своей плоскости; жесткость шпангоута на кручение и изгибную жесткость при деформациях шпангоута из своей плоскости считаем пренебрежимо малыми.

4. Ширина шпангоутов пренебрежимо мала по сравнению с расстояниями между ними.

При выбранной упрощенной расчетной схеме подкрепленной оболочки обшивка находится в однородном безмоментном состоянии до потери устойчивости; шпангоуты нагрузки не несут.

При малом числе шпангоутов и постоянном по длине оболочки внешнем гидростатическом давлении задачу целесообразно решать аналитически, интегрируя уравнения устойчивости полубезмоментной оболочки. Потеря устойчивости обшивки описывается уравнением

$$B_x \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{D_\Phi}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{p}{R^3} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) = 0, \quad (7.35)$$

где B_x — жесткость обшивки на растяжение в осевом направлении; D_Φ — изгибная жесткость обшивки в окружном направлении; Φ — функция перемещений.

Изгиб кругового шпангоута с нерастяжимой осью под действием распределенной касательной нагрузки интенсивности q_k описывается уравнением (см. § 31)

$$EJ_k \left(\frac{d^6 V_k}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 V_k}{d\varphi^4} + \frac{d^2 V_k}{d\varphi^2} \right) = R^4 q_k, \quad (7.36)$$

где EJ_k — изгибная жесткость шпангоута; V_k — окружные перемещения точек осевой линии шпангоута; k — номер шпангоута.

Передаваемая на k -й шпангоут касательная нагрузка равна разности сдвигающих усилий на участках обшивки, прилегающих слева и справа к шпангоуту:

$$q_k = S_{k-0} - S_{k+0}. \quad (7.37)$$

Решение уравнения (7.35) для обшивки между подкреплениями ищем в виде

$$\Phi = X \sin n\varphi, \quad (7.38)$$

где $X = X(x)$ — функция осевой координаты x .

Тогда получим

$$\begin{aligned}v &= -\frac{n}{R} X \cos n\varphi; \\T_x &= B_x X'' \sin n\varphi; \\S &= B_x \frac{R}{n} X'' \cos n\varphi.\end{aligned}\quad (7.39)$$

Выражая касательную нагрузку, передаваемую на k -й шпангоут с помощью зависимостей (7.37) и (7.39) через функцию перемещений Φ и решая с учетом замкнутости шпангоута уравнение (7.36), находим перемещения точек оси k -го шпангоута

$$V_k = -\frac{nR^3}{c_k} (X''_{k-0} - X''_{k+0}), \quad (7.40)$$

где

$$\bar{c}_k = \frac{EJ_k n^4 (n^2 - 1)^2}{B_x R^3}. \quad (7.40a)$$

Используя приведенные зависимости, составим систему граничных и стыковочных условий для оболочки с N пролетами, т. е. для оболочки, подкрепленной $(N - 1)$ промежуточными шпангоутами.

Для каждого $(N - 1)$ промежуточного шпангоута можно выписать следующие четыре условия.

1. Равенство окружных перемещений участков обшивки, прилегающих к шпангоуту слева и справа:

$$v_{k-0} = v_{k+0}, \text{ т. е. } X_{k-0} = X_{k+0}.$$

2. Равенство осевых перемещений

$$u_{k-0} = u_{k+0}, \text{ т. е. } X'_{k-0} = X'_{k+0}.$$

3. Равенство осевых усилий в обшивке слева и справа от шпангоута (при переходе через шпангоут осевое усилие в обшивке не изменяется, поскольку жесткость шпангоутов при деформациях из плоскости принята пренебрежимо малой)

$$(T_x)_{k-0} = (T_x)_{k+0}, \text{ т. е. } X''_{k-0} = X''_{k+0}.$$

4. Равенство окружных перемещений точек оси шпангоута соответствующим окружным перемещениям обшивки

$$V_k = v_k, \text{ т. е. } \frac{R^3}{c_k} (X''_{k-0} - X''_{k+0}) = X_k.$$

Кроме того, на каждом торце оболочки должны быть дополнительно заданы граничные условия $T_x = b_1 u$; $S = b_2 v$, где b_1 , b_2 — соответствующие жесткости упругого закрепления торцов, относительно осевых и окружных перемещений.

Таким образом, для оболочки с N пролетами получается необходимое число условий: $4(N - 1) + 2 \times 2 = 4N$.

Общая схема определения критического давления подкрепленной оболочки состоит в следующем.

Используя зависимость (7.38) для каждого из N пролетов оболочки, решение уравнения (7.35) записываем в виде

$$X_k = A_{k1} \sin \lambda x + A_{k2} \cos \lambda x + A_{k3} \operatorname{sh} \lambda x + A_{k4} \operatorname{ch} \lambda x, \quad (7.41)$$

где

$$\lambda^4 = \frac{n^4(n^2 - 1)}{B_x R^3} \left(p - \frac{D_\Phi(n^2 - 1)}{R^3} \right).$$

Число волн n должно быть одинаковым для всех пролетов оболочки из условия стыковки. Поэтому если давление p и жесткостные характеристики обшивки B_x и D_Φ постоянны по всей длине оболочки, то значение λ будет общим для всех пролетов.

Подчинение решений (7.41) всем граничным и стыковочным условиям приводит к системе $4N$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных A_{ki} . Из условия равенства нулю определителя этой системы получаем характеристическое уравнение, позволяющее найти $\lambda = \lambda(n)$. Зная λ , подсчитываем собственные значения давления

$$p_n = \frac{B_x R^3 \lambda^4}{n^4(n^2 - 1)} + \frac{(n^2 - 1) D_\Phi}{R^3} \quad (7.42)$$

В отличие от задач, рассмотренных в предыдущем параграфе число волн n входит в граничные (стыковочные) условия. Поэтому величина $\lambda = \lambda(n)$ оказывается зависящей от числа волн n . Следовательно, при определении критического значения $p_{кр}$ в рассматриваемой задаче нельзя минимизировать выражение (7.42) по числу волн n . Из характеристического уравнения для каждого значения n следует находить минимальное значение $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(n)$, затем подсчитывать p_n по формуле (7.42), повторяя эту процедуру при различных n до получения наименьшего $(p_n)_{\min} = p_{кр}$. При вычислениях следует учитывать, что зависимость $p_n = p_n(n)$ может иметь несколько локальных минимумов; за окончательное значение $p_{кр}$ следует принять наименьшее из них.

Общую схему определения критического давления проиллюстрируем несколькими примерами.

1. Устойчивость свободно опертой по обоим торцам цилиндрической оболочки длиной $2l$, подкрепленной одним симметрично расположенным шпангоутом жесткости EJ (рис. 7.3). Граничные условия на торцах

$$V = 0, T_x = 0, \text{ т. е. } X = 0, X'' = 0.$$

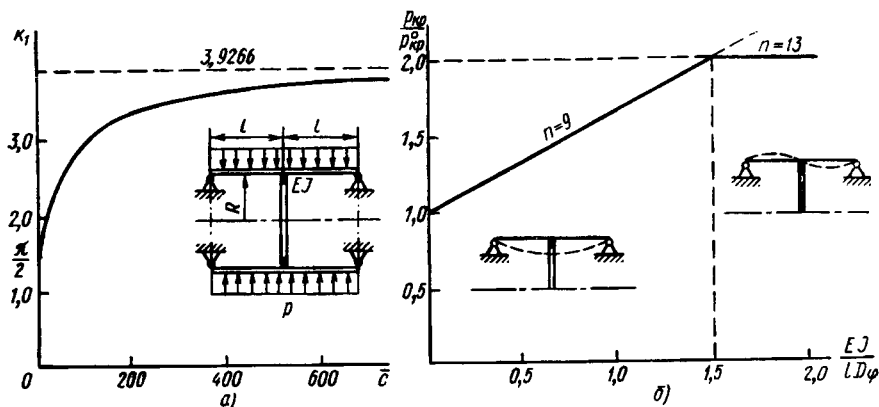


Рис. 7.3

На шпангоуте должны выполняться четыре условия стыковки. Характеристическое уравнение распадается на два независимых уравнения

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$k^3 = \frac{1}{4} (\operatorname{th} k - \operatorname{tg} k),$$

где $k = \frac{\lambda l}{R}$.

Первое из этих уравнений соответствует так называемой местной потере устойчивости подкрепленной оболочки, когда обшивка теряет устойчивость, а шпангоут сохраняет круговую форму. Наименьший корень этого уравнения дает $\lambda_1 = \frac{\pi R}{l}$. Из выражения (7.42) находим

$$p_n = \frac{B \left(\frac{\pi R}{l} \right)^4}{R n^4 (n^2 - 1)} + \frac{D_\varphi (n^2 - 1)}{R^3}.$$

В данном частном случае корни первого уравнения не зависят от числа волн n и критическое давление можно определять минимизацией p_n по n . В частности, при $n^2 \gg 1$ (см. § 37) получим

$$p_{\text{кр}}^{\text{м}} = 4 \left(\frac{\pi R}{l} \right) \left(\frac{B_x}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_\varphi}{3R^3} \right)^{3/4}.$$

Критическое давление $p_{\text{кр}}^{\text{м}}$, соответствующее местной потере устойчивости обшивки, не зависит от жесткости шпангоута.

Второе из этих уравнений соответствует так называемой общей потере устойчивости подкрепленной оболочки, когда обшивка

теряет устойчивость вместе с подкреплением. Зависимость значения наименьшего корня этого уравнения от приведенной жесткости шпангоута $\bar{c}$ показана на рис. 7.3, а. Критическое давление $p_{кр}^{об}$ общей потери устойчивости определяется выражением (7.42), но при минимизации этого выражения по числу волн n необходимо учитывать, что при изменении n изменяется приведенная жесткость шпангоута $\bar{c}$ и, следовательно, значение корня характеристического уравнения. Типичный график зависимости безразмерного критического давления $\bar{p}_{кр} = \frac{p_{кр}^{об}}{p_{кр}^0}$ от безразмерной

жесткости шпангоута $\frac{EJ}{lD_\Phi}$ приведен на рис. 7.3, б, здесь $p_{кр}^0$ — критическое давление оболочки при $EJ = 0$. Приведенный график построен для подкрепленной оболочки с параметрами $\frac{l}{R} = 1$, $\frac{R}{h} = 500$. Для оболочек средней длины, теряющих устойчивость с образованием достаточно большого числа волн n , этот график практически не зависит от абсолютных значений параметров подкрепленной оболочки (изменяются только числа волн n). Заметим, что зависимость критического давления от величины жесткости шпангоута полностью повторяет зависимость критической силы от жесткости упругой опоры шарнирно-опертого стержня. Как и в задаче об устойчивости стержня с упругой опорой, смена форм потери устойчивости происходит при достижении некоторого значения эффективной жесткости шпангоута $EJ_{эф}$. При жесткости шпангоута, меньшей эффективной, происходит общая потеря устойчивости подкрепленной оболочки, и увеличение жесткости шпангоута приводит к повышению критического давления [2].

При жесткости шпангоута, большей $EJ_{эф}$, происходит местная потеря устойчивости обшивки, и дальнейшее увеличение жесткости шпангоута не влияет на критическое давление. Для оболочек средней длины, подкрепленных одним симметрично расположенным шпангоутом, такая смена форм потери устойчивости происходит примерно при $EJ_{эф} = 1,5lD_\Phi$, где $2l$ — длина всей оболочки; D_Φ — изгибная жесткость обшивки в окружном направлении.

Аналогично значение эффективной жесткости шпангоутов $EJ_{эф}$ можно определить и при большем числе подкреплений свободно опертой по торцам цилиндрической оболочки. Так, для оболочки длины $3l$, подкрепленной двумя равноотстоящими шпангоутами одинаковой жесткости, смена форм устойчивости происходит примерно при $EJ_{эф} = 3,2lD_\Phi$.

При этом следует помнить, что разделение потери устойчивости подкрепленной оболочки на местную и общую условны, поскольку реальная подкрепленная оболочка является единой упругой системой и всякая потеря устойчивости общая. Термины

местная и общая потеря устойчивости подкрепленной оболочки удобны, так как они отражают качественную сторону задачи. При местной потере устойчивости оболочки шпангоут практически сохраняет круговую форму, а деформируется в основном обшивка. При общей потере устойчивости деформируется вся подкрепленная оболочка.

2. Устойчивость консольной цилиндрической оболочки с краем, подкрепленным шпангоутом. Когда край полубезмоментной оболочки подкреплен упругим шпангоутом, обладающим только изгибной жесткостью EJ в своей плоскости, то при $x = l$ граничные условия будут:

$$1) X'' = 0; \quad 2) \frac{R^3}{c} X'' = X,$$

где $\bar{c}$ — определяется по формуле (7.40а).

Рассмотрим два способа закрепления второго края оболочки при $x = 0$. Примем, что в первом случае закрепление края полностью исключает окружные и осевые перемещения, т. е. при $x = 0$ $X = 0$; $X' = 0$.

Подчинение общего решения (7.41) граничным условиям приводит к системе уравнений, равенство нулю определителя которой приводит к характеристическому уравнению

$$\bar{c} = k^3 \frac{1 + \cos k \operatorname{ch} k}{\cos k \operatorname{sh} k - \operatorname{ch} k \sin k},$$

где $k = \frac{\lambda R}{l}$.

На рис. 7.4 приведена типичная зависимость безразмерного критического давления $\bar{p}_{кр} = p_{кр}/p_{кр}^0$ от относительной жесткости торцового шпангоута EJ/ID_ϕ , причем $p_{кр}^0$ — критическое давление свободно опертой по обоим торцам оболочки длины l . График построен для оболочки с параметрами $R/l = 1$, $R/h = 500$. Проследим за изменением числа волн n и формы изгиба образующей при потере устойчивости оболочки. При $EJ = 0$ оболочка теряет устойчивость с образованием $n_{кр} = 10$, причем максимальные перемещения возникают на свободном краю оболочки. С увеличением жесткости шпангоута до $EJ/ID_\phi \approx 0,45$ критическое давление существенно возрастает, число волн уменьшается до $n_{кр} = 9$, а форма изгиба образующей остается качественно такой же, как у неподкрепленной оболочки.

При $EJ/ID_\phi = 0,45$ происходит резкая смена форм потери устойчивости оболочки: число окружных волн возрастает до $n_{кр} = 14$ (потом увеличивается до $n_{кр} = 15$), а точки, перемещения которых достигают максимума, смещаются с края оболочки к ее середине. Дальнейшее увеличение жесткости торцового шпангоута не изменяет существенно ни формы потери устойчивости, ни значения критического давления. Качественная картина

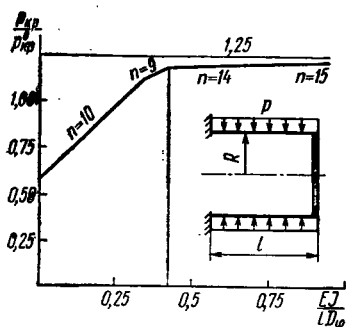


Рис. 7.4

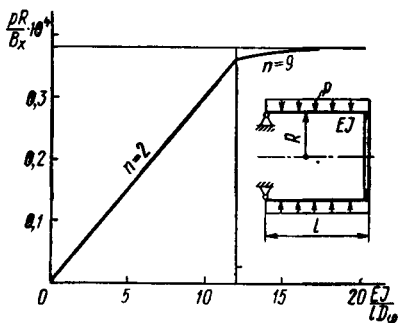


Рис. 7.5

зависимости критической нагрузки оболочки от жесткости торцового шпангоута повторяет зависимость критической силы сжатого стержня с упруго закрепленным торцом (стр. 105).

В рассмотренной задаче тоже можно ввести понятие эффективной жесткости торцового шпангоута $EJ_{\text{эф}}$, при достижении которой происходит качественная смена картины потери устойчивости. Хотя график, приведенный на рис. 7.4, построен для оболочки с конкретными параметрами, расчеты показывают, что зависимость безразмерного критического давления от относительной жесткости торцового шпангоута практически остается такой же для других оболочек средней длины (изменяется только значение $n_{\text{кр}}$). Поэтому, в частности для оболочек средней длины с одним жестко закрепленным краем эффективную жесткость торцового шпангоута можно считать равной

$$EJ_{\text{эф}} = 0,45D_{\phi}l.$$

Рассмотрим второй вариант закрепления края оболочки при $x = 0$. Примем, что на этом краю запрещены окружные (следовательно, и радиальные) перемещения, но не стеснены осевые перемещения, т. е. при $x = 0$ $X = 0$; $X'' = 0$.

При $x = l$ сохраняются граничные условия первого варианта. В этом случае характеристическое уравнение принимает вид

$$\bar{c} = \frac{k^3}{2} (\text{cth } k - \text{ctg } k).$$

Типичная зависимость безразмерного критического давления от относительной жесткости торцового шпангоута приведена на рис. 7.5. Она построена для оболочки с параметрами $l/R = 1$, $R/h = 500$. В этом случае при значении жесткости торцового шпангоута $EJ_{\text{эф}}$ происходит резкая качественная смена форм потери устойчивости. При $EJ < EJ_{\text{эф}}$ значение наименьшего корня характеристического уравнения оказывается малым. Разложив правую часть этого уравнения в ряд по степеням k , получим $3\bar{c} = k^4$.

Тогда, учитывая что $\lambda = \frac{kR}{l}$, из выражения (7.42) найдем

$$\rho_{кр} = \frac{(n^2 - 1) D_{\Phi}}{R^3} \left(1 + \frac{3EJ}{lD_{\Phi}} \right).$$

Причем в этой формуле $n_{кр} = 2$.

Физический смысл полученной формулы состоит в том, что при $EJ < EJ_{эф}$ потеря устойчивости оболочки происходит без растяжения ее срединной поверхности. Критическое давление определяется только изгибной жесткостью обшивки и торцового шпангоута.

Если $EJ > EJ_{эф}$, то при потере устойчивости оболочка ведет себя так же, как оболочка, свободно опертая по обоим торцам, причем торцовый шпангоут практически сохраняет круговую форму. Для оценки эффективной жесткости торцового шпангоута нетрудно получить следующую зависимость:

$$1 + \frac{3EJ_{эф}}{lD_{\Phi}} \approx \frac{4}{9} \left(\frac{\pi R}{l} \right) \left(\frac{B_x}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_{\Phi}}{3R^3} \right)^{-1/4}.$$

Причем значение $EJ_{эф}$ существенно выше, чем в предыдущем примере.

§ 39. Определение критических нагрузок с помощью критерия устойчивости в форме С. П. Тимошенко

Полубезмоментная теория в сочетании с энергетическим критерием в форме С. П. Тимошенко позволяет построить простое приближенное решение задачи устойчивости цилиндрической оболочки при произвольном поперечном осесимметричном нагружении.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, на которую действует осесимметричная радиальная «мертвая» нагрузка интенсивности $p_z = p_z(x)$ и осесимметричное внешнее гидростатическое давление $p = p(x)$. Начальное напряженное состояние оболочки считаем осесимметричным и безмоментным, причем

$$T_x^0 = 0; T_y^0 = R[p_z(x) - p(x)]; S^0 = 0.$$

Отклонения оболочки от начального состояния зададим перемещениями:

$$\begin{aligned} u &= \alpha u_1(x, \varphi) + \alpha^2 u_2(x, \varphi); \\ v &= \alpha v_1(x, \varphi) + \alpha^2 v_2(x, \varphi); \\ w &= \alpha w_1(x, \varphi) + \alpha^2 w_2(x, \varphi), \end{aligned} \quad (7.43)$$

где α — независимый от координат бесконечно малый параметр; $u_1(x, \varphi)$, $u_2(x, \varphi)$, $v_1(x, \varphi)$ и т. д. — конечные функции координат.

Окружные удлинения и сдвиги тождественно равны нулю с точностью до первой степени параметра α , если (см. § 36) ввести функцию перемещений Φ_1 с помощью соотношений

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = u_1; \quad -\frac{\partial \Phi_1}{R \partial \varphi} = v_1; \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{R \partial \varphi^2} = w_1. \quad (7.44)$$

Тогда пропорциональное α^2 изменение полной потенциальной энергии полубезмоментной оболочки при переходе в новое возмущенное состояние можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = & \frac{B_x}{2} \iint \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \right)^2 R d\varphi dx + \frac{D_\Phi}{2R^3} \iint \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \varphi^4} \right)^2 R d\varphi dx - \\ & - \iint p_z(x) w_2 R d\varphi dx + \iint p(x) w_2 R d\varphi dx + \\ & + \frac{1}{2} \iint p(x) \left(\frac{v_1^2}{R} - \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \frac{v_1}{R} \right) R d\varphi dx. \end{aligned} \quad (7.45)$$

В этом выражении последнее слагаемое получено с помощью выведенной в § 32 зависимости для вычисления изменения объема оболочки с точностью до квадратов перемещений. Заметим, что при рассматриваемых сейчас нагрузках перемещения u_2 и v_2 в выражение (7.45) не вошли, поэтому их можно не определять. Это обстоятельство значительно упрощает решение: перемещение w_2 можно найти не из общих условий самоуравновешенности квадратичных усилий (см. § 10), а из условия нерастяжимости полубезмоментной оболочки в окружном направлении, выполняемом с точностью до α^2 .

При осесимметричном начальном напряженном состоянии функцию бифуркационных перемещений Φ_1 можно найти в виде

$$\Phi_1 = F_1(x) \cos n\varphi, \quad (7.46)$$

где $F_1(x)$ — функция осевой координаты x .

Пропорциональное α^2 окружное удлинение равно

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial v_2}{R \partial \varphi} + \frac{w_2}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{R \partial \varphi} - \frac{v_1}{R} \right)^2.$$

Учитывая соотношения (7.44) и (7.46), из условия $\varepsilon_\varphi = 0$ получим

$$\frac{\partial v_2}{R \partial \varphi} + \frac{w_2}{R} = -\frac{1}{2} [F_1(x)]^2 \frac{(n^2 - n)^2}{R^4} \sin^2 n\varphi. \quad (7.47)$$

Перемещения v_2 , w_2 будем искать в виде разложения по тригонометрическим функциям

$$\begin{aligned} v_2 &= V_2(x) \sum b_{2i} \sin i\varphi; \\ w_2 &= W_2(x) \left(1 + \sum c_{2i} \cos i\varphi \right), \end{aligned}$$

где $V_2(x)$, $W_2(x)$ — функции осевой координаты x .

Тогда из равенства (7.47) придем к уравнению

$$-\frac{1}{4} [F_1(x)]^2 \frac{(n^2-1)^2}{R^4} (1 - \cos 2n\varphi) + \frac{W_2(x)}{R} + \\ + \frac{1}{R} \sum [ib_{2i}V_2(x) + c_{2i}W_2(x)] \cos i\varphi = 0.$$

При осесимметричном нагружении оболочки коэффициенты c_{2i} не влияют на изменение полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, поэтому их можно не определять (как и коэффициенты b_{2i}).

Осесимметричная составляющая перемещения w_2 , необходимая для подсчета изменения полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, равна

$$W_2(x) = -\frac{1}{4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{R^3} [F_1(x)]^2. \quad (7.48)$$

Выражение (7.45) можно преобразовать

$$\Delta\mathcal{E} = \pi R \left\{ \int_0^l B_\lambda \left(\frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{n^4(n^2-1)^2}{R^6} \int_0^l D [F_1(x)]^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{n^2(n^2-1)^2}{R^4} \int_0^l p_z(x) [F_1(x)]^2 dx - \frac{n^4(n^2-1)}{R^3} \int_0^l p(x) [F_1(x)]^2 dx \right\}. \quad (7.49)$$

Таким образом, задача определения критических нагрузок сводится к определению одной единственной функции $F_1(x)$, через которую выражено изменение полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$. Задавшись (с учетом граничных условий на торцах оболочки) функцией $O_1(x)$, из условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ можно получить приближенные собственные значения нагрузок. Подбрав число волн в окружном направлении $n_{кр}$, при котором собственное значение нагрузки достигает минимума, вычислим приближенное критическое значение нагрузки.

Приведем несколько примеров использования выражения (7.49).

1. Оболочка со свободными торцами под действием постоянной по длине радиальной нагрузки $p_z^0 = \text{const}$ и постоянного гидростатического давления $p^0 = \text{const}$. В этом случае можно принять $F_1(x) = 1$.

Условие $\Delta\mathcal{E} = 0$ дает

$$p^0 n^2 - p_z^0 (n^2 - 1) = n(n^2 - 1) \frac{D_\Phi}{R^3}, \quad (7.50)$$

где p^0 — внешнее гидростатическое давление; p_z — «мертвая» распределенная нагрузка, направленная по нормали к недеформированной срединной поверхности оболочки. При этом $n_{кр} = 2$.

Из зависимости (7.50) можно получить формулы * (см. § 31) для частных случаев

$$p_{кр}^0 = \frac{3D_{\Phi}}{R^3}$$

$$(-p_z^0)_{кр} = \frac{4D_{\Phi}}{R^3},$$

где знак минус означает, что потеря устойчивости происходит при сжимающей «мертвой» нагрузке p_z .

Те же результаты получим и для полубезмоментной оболочки, один край которой свободно оперт, а другой — свободен. В этом случае оболочка может деформироваться без растяжения срединной поверхности. Приняв $F_1(x) = x$, снова придем к зависимости (7.50).

2. Свободно опертая по обоим торцам оболочка под действием равномерного гидростатического давления p . Если $F_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$, то условие $\Delta \mathcal{E} = 0$ приводит к точной в рамках полубезмоментной теории формуле

$$p_n = \frac{B_x}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l}\right)^4}{n^4(n^2-1)} + \frac{D_{\Phi}}{R^3} (n^2-1).$$

Откуда, в частности, при $n^2 \gg 1$ следует, что

$$p_{кр} = 4 \left(\frac{\pi R}{l}\right) \left(\frac{B_x}{R}\right)^{1/4} \left(\frac{D_{\Phi}}{3D^*}\right)^{3/4}.$$

Оболочка малочувствительна к виду функции $F_1(x)$, если это достаточно гладкая функция, удовлетворяющая всем геометрическим граничным условиям задачи. Так, например, взяв в рассматриваемой задаче такую заведомо «грубую» функцию

$$F_1(x) = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

удовлетворяющую геометрическим граничным условиям, из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ получим

$$p_n = \frac{B_x}{R} \frac{120R^4}{n^4(n^2-1)l^4} + \frac{D_{\Phi}}{R^3} (n^2-1),$$

* Если оболочка нагружена внутренним гидростатическим давлением p и сжимающей «мертвой» нагрузкой, интенсивность которой $p_z = p$, то в начальном осесимметричном состоянии равновесия $T_x = 0$, $T_{\Phi} = 0$, $S = 0$. Однако оболочка может потерять устойчивость. Действительно, из формулы (7.50) следует, что $p_{кр} = n^2(n^2-1) \frac{D}{R^3}$ при $n_{кр} = 2$, т. е. $p_{кр} = 12 \frac{D}{R^3}$.

что после минимизации по числу волн n (при $n^2 \gg 1$ дает)

$$p_{кр} = 4 \frac{\sqrt[4]{120R}}{l} \left(\frac{(Eh)_1}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_\Phi}{3R^3} \right)^{3/4}.$$

Это значение $p_{кр}$ на 5% превышает значение давления, вычисленное по предыдущей формуле для $p_{кр}$.

3. Оболочка под действием переменного по длине давления $p(x) = p^0 \psi(x)$. В этом случае, задавшись функцией $F_1(x)$ в виде одночлена, из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ можно найти собственные значения нагрузки P :

$$p_n^0 = \frac{R^3 \int_0^l B_x \left(\frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{n^4 (n^2 - 1)} + \frac{n^2 - 1}{R^3} \int_0^l D_\Phi [F_1(x)]^2 dx}{\int_0^l \psi(x) [F_1(x)]^2 dx}, \quad (7.51)$$

где $n_{кр}$ и $p_{кр}^0$ определяем из условия минимума p_n^0 .

Если по длине оболочки внешняя нагрузка остается одного знака, то даже одночленное приближение обеспечивает вполне приемлемую точность. Возьмем, например, свободно опертую оболочку под действием радиальной локальной кольцевой нагрузки q . Будем считать, что оболочка теряет устойчивость по достаточно большому числу волн n и поэтому не будем различать гидростатические и «мертвые» нагрузки (см. § 32). Взяв функцию $F_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$ при $n^2 \gg 1$ получим

$$q_n = \frac{l}{2} \left[\left(\frac{\pi R}{l} \right)^4 \frac{B_x}{R n^4} + \frac{D_\Phi}{R^3} n^2 \right].$$

Минимизируя по числу волн n , находим

$$q_{кр} = 2\pi R \left(\frac{B_x}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_\Phi}{3R^3} \right)^{3/4}. \quad (7.52)$$

Таким образом, если оболочка достаточно длинная, чтобы при потере устойчивости ее можно было рассматривать как полубезмоментную, то критическая нагрузка $q_{кр}$ не зависит от длины оболочки. В частности, из (7.52) для изотропной оболочки получим

$$q_{кр} = \frac{kER}{(1 - \mu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2},$$

где $k = 0,42$.

Если функцию $F_1(x)$ взять в виде ряда

$$F_i(x) = \sum_{i=0}^N c_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

то условие $\Delta\mathcal{E} = 0$ дает

$$q = \frac{l}{2} \frac{\sum c_i^2 p_i}{\left(\sum c_i \sin \frac{i\pi}{2} \right)^2},$$

где (при $n^2 \gg 1$)

$$p_i = \frac{B_x \left(\frac{i\pi R}{l} \right)^4}{R n^6} + n^2 \frac{D_\Phi}{R^3}.$$

Необходимые условия минимума q , т. е. условия $\frac{\partial q}{\partial c_i} = 0$ приводят к системе уравнений

$$c_j \frac{p_j l}{2} - q \sin \frac{j\pi}{2} \sum c_i \sin \frac{j\pi}{2} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы можно определить собственные значения q_n :

$$\begin{vmatrix} \frac{p_1 l}{2} - q & +q & -q \dots \\ +q & \frac{p_2 l}{2} - q & +q \dots \\ -q & +q & \frac{p_3 l}{2} - q \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Простая структура полученного определителя порядка N позволяет выразить q_n в явном виде

$$q_n = \frac{l}{2} \frac{1}{\sum \frac{1}{p_i}}.$$

Стоящий в знаменателе ряд сходится так быстро, что можно ограничиться двумя-тремя его членами.

Отметим, что для бесконечно длинной изотропной оболочки П. И. Балабухом и В. М. Марченко найдено $k = 0,38$ [19].

4. Оболочка, подкрепленная упругими шпангоутами. Если оболочка подкреплена произвольно расположенными шпангоутами различной жесткости EJ_k и нагружена переменным по длине внешним давлением $p(x) = p^0 \psi(x)$, то при выполнении ограничений, перечисленных в предыдущем параграфе, для определения критического давления тоже можно воспользоваться изложенным решением.

Из условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ получим

$$p_n^0 = \left\{ \frac{R^3 \int_0^l B_x \left(\frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{(n^2 - 1) n^4} + \frac{n^2 - 1}{R^3} \int_0^l D_\Phi [F_1(x)]^2 dx + \frac{n^2 - 1}{R^3} \sum (EJ)_k [F_1(x_k)]^2 \right\} \frac{1}{\int_0^l \psi(x) [F_1(x)]^2 dx},$$

где x_k — координата k -го шпангоута; l — полная длина оболочки. Задавая функцию $F_1(x)$ в виде ряда, путем несложных вычислений можно найти $p_{кр}^0$ общей потери устойчивости подкрепленной оболочки практически с любой степенью точности. Для большинства задач достаточно взять $F_1(x)$ в виде одночлена, удовлетворяющего геометрическим граничным условиям на торцах оболочки. В этом случае подсчет $p_{кр}^0$ становится элементарным.

Приведенные в этой главе зависимости справедливы для гладких и конструктивно ортотропных цилиндрических оболочек. В каждом конкретном случае расчета нужно найти жесткость оболочки на растяжение в осевом направлении B_x и изгибную жесткость в окружном направлении D_Φ . Для гладкой однослойной оболочки можно принять

$$D_\Phi = D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}; \quad B_x = Eh.$$

На рис. 7.6 показаны несколько вариантов конструктивно ортотропных цилиндрических оболочек. Для оболочки, подкрепленной большим числом шпангоутов с изгибной жесткостью $EJ_{ш}$, при расчете по полубезмоментной теории следует положить (рис. 7.6, а)

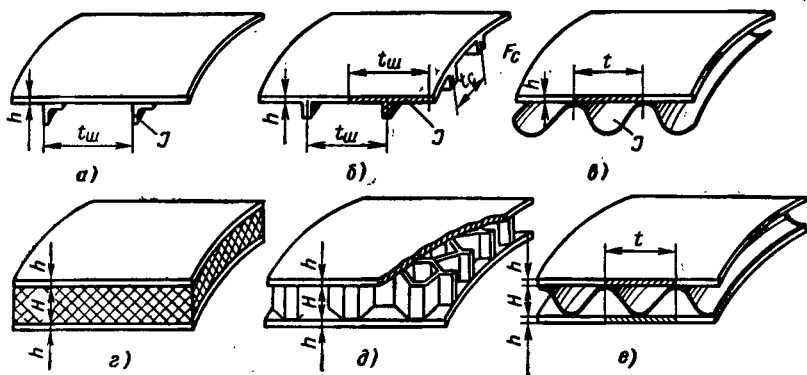


Рис. 7.6

$$D_{\varphi} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EJ_{\text{ш}}}{t_{\text{ш}}}; \quad B_x = Eh.$$

Для оболочки «вафельного» типа (рис. 7.6, б)

$$D_{\varphi} = \frac{EJ}{t_{\text{ш}}}; \quad B_x = E \left(h + \frac{F_c}{t_c} \right),$$

где EJ — суммарная изгибная жесткость окружного ребра и прилегающего к нему участка обшивки; $t_{\text{ш}}$ — шаг окружных ребер; F_c — площадь поперечного сечения осевых ребер; t_c — шаг осевых ребер.

Когда оболочка подкреплена кольцевым гофром (рис. 7.6, в) можно принять

$$D_{\varphi} = \frac{EJ}{t}; \quad B_x = Eh,$$

где EJ — суммарная изгибная жесткость одного гофра и относящейся к нему части обшивки; t — шаг гофра.

Если при расчете трехслойных оболочек (рис. 7.6, г—е) не учитывать сдвиговые деформации пакета (см. § 16), при $H \gg h$ следует принять

$$D_{\varphi} = \frac{EH^3h}{2}; \quad B_x = 2Eh.$$

В последнем случае при подсчете D_{φ} можно учесть и изгибную жесткость гофра.

Приложение I

Задачи на собственные значения

Задача на собственные значения для дифференциального уравнения формулируется следующим образом: задано однородное уравнение

$$M[y] - PL[y] = 0,$$

где $M[y]$, $L[y]$ — однородные линейные дифференциальные выражения, P — некоторый параметр; граничные условия, заданные при $x = a$ и $x = b$, однородны. Требуется найти собственные значения и собственные функции задачи, т. е. такие значения параметра P_n , при которых данная задача имеет отличные от тождественного нуля решения, и с точностью до масштаба определить функции $y_n(x)$, соответствующие этим значениям P_n .

Порядок дифференциального выражения $M[y]$ обозначим $2m$ и будем считать, что он выше порядка выражения $L[y]$. Тогда корректно сформулированная задача должна иметь $2m$ линейно независимых граничных условий. Граничные условия, содержащие производные порядка не выше $(m-1)$, называют главными граничными условиями (или геометрическими условиями).

Допустимыми функциями задачи называют m -кратно непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие главным граничным условиям.

Функциями сравнения задачи называют $2m$ -кратно непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие всем заданным граничным условиям (функция сравнения, удовлетворяющая и дифференциальному уравнению, является собственной функцией задачи).

Основные результаты в теории задач на собственные значения получены для самосопряженных и полностью определенных задач. Задачу на собственные значения называют самосопряженной, если для любых двух функций сравнения u и v выполняются условия

$$\int_a^b uM[v] dx = \int_a^b vM[u] dx; \quad \int_a^b uL[v] dx = \int_a^b vL[u] dx.$$

Задачу на собственные значения называют полностью определенной, если для любой функции сравнения выполняются неравенства

$$\int_a^b uM[u] dx > 0; \quad \int_a^b uL[u] dx > 0.$$

Самосопряженность и полная определенность задачи на собственные значения в каждом конкретном случае могут быть установлены путем интегрирования по частям.

Самосопряженная полностью определенная задача на собственные значения, не содержащая параметра P в граничных условиях, всегда имеет бесконечный спектр положительных собственных значений, из которых в задачах устойчивости обычно достаточно найти только наименьшее собственное значение, определяющее критическую нагрузку. Бесконечному спектру собственных значе-

ний соответствует бесконечная система собственных функций задачи, обладающих следующими важными свойствами.

Свойство обобщенной ортогональности собственных функций состоит в том, что для любых двух собственных функций $y_i(x)$ и $y_k(x)$, соответствующих двум различным собственным значениям P_i и P_k , выполняются условия

$$\int_a^b y_i M[y_k] dx = 0; \quad \int_a^b y_i L[y_k] dx = 0. \quad (i \neq k)$$

В частности, если $L[y] = y$, то система собственных функций ортогональна в обычном смысле, т. е.

$$\int_a^b y_i y_k dx = 0. \quad (i \neq k)$$

Система собственных функций обладает свойством полноты: любую функцию сравнения можно разложить в ряд по собственным функциям и этот ряд будет равномерно и абсолютно сходиться в интервале (a, b) , для которого сформулирована данная задача.

Для самосопряженной и полностью определенной задачи на собственные значения справедлива теорема о минимуме отношения Рэлея. Согласно этой теореме минимум отношения Рэлея, определяемого выражением

$$R(u) = \frac{\int_a^b u M[u] dx}{\int_a^b u L[u] dx},$$

равен первому собственному значению задачи P_1 , если функция u пробегает всю область функций сравнения. Этот минимум реализуется на функции сравнения, совпадающей с первой собственной функцией задачи $y_1(x)$.

Теорема о минимуме отношения Рэлея указывает путь приближенного решения задач на собственные значения: задаваясь различными функциями сравнения, вид которых подсказывается физическим смыслом задачи, можно получать оценки (сверху) для первых собственных значений. Теорема о минимуме отношения Рэлея справедлива только для самосопряженных и полностью определенных задач на собственные значения, поэтому связанные с ней приближенные методы, строго говоря, применимы только при тех же ограничениях. Все консервативные задачи теории упругой устойчивости являются самосопряженными, но они не всегда бывают полностью определенными. Последнее обстоятельство иногда следует учитывать при построении приближенных решений.

Все сказанное о задачах на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений справедливо и в отношении задач на собственные значения для дифференциальных уравнений в частных производных.

Задачи на собственные значения для матриц состоят в следующем. Пусть задана система линейных однородных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = Px_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = Px_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = Px_N,$$

где x_i — неизвестные; P — некоторый параметр.

В матричной форме записи эта система имеет вид

$$Ax - Px = 0,$$

где A — квадратная матрица коэффициентов заданной системы; x — вектор-столбец неизвестных x_i :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Условием существования отличных от нуля решений системы однородных линейных уравнений является равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} - P & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} - P & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} - P \end{vmatrix} = 0.$$

В матричной записи

$$\det(A - PE) = \det[a_{ij} - P\delta_{ij}] = 0,$$

где E — единичная матрица; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $j \neq i$. Уравнение $\det[a_{ij} - P\delta_{ij}] = 0$ степени N называют характеристическим уравнением; его N корней дадут те значения P_n , при которых возможны отличные от нуля решения исходной системы.

Такого типа задачу называют частной задачей на собственные значения для матрицы; найденные N значений P_n — собственными значениями матрицы A , а соответствующие им векторы x_n — собственными векторами матрицы A .

Кроме частных задач на собственные значения для матриц встречаются и общие задачи на собственные значения. В этом случае задается матричное однородное уравнение

$$Ax - PBx = 0,$$

где A и B — квадратные матрицы; P — некоторый параметр; x — вектор-столбец неизвестных.

В этом случае условие существования отличных от нуля решений запишется так:

$$\det(A - PB) = \det[a_{ij} - Pb_{ij}] = 0$$

или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - Pb_{11}) & (a_{12} - Pb_{12}) & \dots & (a_{1N} - Pb_{1N}) \\ (a_{21} - Pb_{21}) & (a_{22} - Pb_{22}) & \dots & (a_{2N} - Pb_{2N}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{N1} - Pb_{N1}) & (a_{N2} - Pb_{N2}) & \dots & (a_{NN} - Pb_{NN}) \end{vmatrix} = 0.$$

При решении общей задачи на собственные значения из характеристического уравнения находят N собственных значений P_n , а из соответствующих решений уравнения (12) — N собственных векторов x_n . В частной и общей задачах собственные векторы x_n можно найти только с точностью до постоянного множителя [25].

Стационарные значения и экстремумы функций и функционалов

Приращение функции нескольких переменных $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть подсчитано по формуле Тейлора

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \dots, \quad (\text{II.1})$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ — приращения независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; частные производные берутся в рассматриваемой точке.

Функция имеет минимум (максимум), если ее значения в рассматриваемой точке меньше (больше) значений во всех достаточно близких точках. Таким образом, функция имеет минимум (максимум), если $\Delta f > 0$ ($\Delta f < 0$) при любых достаточно малых приращениях независимых переменных.

Необходимым условием минимума или максимума, т. е. экстремума функции, является равенство нулю ее первого дифференциала, что эквивалентно равенству нулю всех ее первых частных производных в рассматриваемой точке

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{II.2})$$

Это условие не является достаточным условием экстремума. Так, например, для того чтобы функция имела минимум, кроме условия (II.2) в рассматриваемой точке должно еще выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0 \quad (\text{II.3})$$

при любых комбинациях приращений независимых переменных, т. е. условие положительной определенности второго дифференциала. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0; \quad & \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{array} \right| > 0; \dots \\ & \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{array} \right| > 0. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Если хотя бы одно из неравенств (II.4) обращается в равенство, то для выяснения характера поведения функции в рассматриваемой точке в разложении (II.1) необходимо учесть и исследовать следующие слагаемые, зависящие от производных более высокого порядка.

Аналогично, для того чтобы функция имела максимум, кроме условия (II.2) в рассматриваемой точке должно выполняться условие отрицательной определенности второго дифференциала.

Независимо от знаков второго и высших дифференциалов все точки, в которых выполняется условие (II.2), называют стационарными точками, а значения функции в них — стационарными. В стационарной точке второй дифференциал может оказаться ни положительно, ни отрицательно определенным, тогда функция не имеет ни минимума, ни максимума. Это, так называемая точка минимакса. Такие стационарные точки характерны для задач упругой устойчивости.

Условия (II.2) определяют стационарные точки в том случае, когда независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ не связаны между собой никакими соотношениями. Рассмотрим следующую задачу. Найти необходимое условие экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если независимые переменные связаны между собой соотношениями

$$\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{II.5})$$

где $m < n$.

Такого типа задачи называют задачами на условный экстремум. Условия (II.5) уменьшают число независимых переменных до $(n-m)$. Поэтому исключив лишние переменные с помощью соотношений (II.5), исследуемую функцию можно выразить через оставшиеся $(n-m)$ независимых переменных и свести задачу определения необходимых условий экстремума к рассмотренной выше задаче. Но такой путь решения не всегда удобен и возможен.

Задачи на условный экстремум можно решать методом множителей Лагранжа. Согласно этому методу необходимые условия экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при дополнительных соотношениях связи (II.5) записываются так:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{II.6})$$

где

$$F^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{II.7})$$

Здесь λ_k — неизвестные параметры, называемые множителями Лагранжа.

Таким образом получается, что для определения $(n+m)$ неизвестных x_i и λ_k имеем $(n+m)$ уравнений: n уравнений дает система (II.6) и m уравнений — система (II.5).

Стационарные точки в задачах на условный экстремум, найденные тем или иным способом, могут соответствовать максимуму, минимуму или минимаксу. Для выяснения этого необходимо провести исследование, подобное описанному выше.

Обобщение задачи нахождения экстремумов функций для случая нахождения экстремумов функционалов дается в вариационном исчислении. Рассмотрим, например, определенный интеграл

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx, \quad (\text{II.8})$$

где $y = y(x)$. При фиксированных пределах интегрирования и заданном подынтегральном выражении $F(x, y, y', y'')$ значение определенного интеграла зависит от конкретного выбора функции $y = y(x)$, т. е. является функцией от функции. Зависимости такого типа, обобщающие понятие функции, называют функционалами.

Понятие вариации в вариационном исчислении имеет такое же фундаментальное значение, как и понятие дифференциала в дифференциальном исчислении. Вариацией функции $y = y(x)$ называют допустимое по условиям данной задачи малое изменение этой функции. Вариация функции обозначается $\delta y(x)$. Аналогично вводят понятия вариаций первой и высших производных функции: обозначают их соответственно $\delta y'(x)$, $\delta y''(x)$, и т. д. Заметим, что $(\delta y(x))' = \delta y'(x)$, т. е. символ δ можно выносить за знак дифференцирования.

При варьировании функции и ее производных изменяется значение функционала Φ . Главную линейную относительно вариации функции составляющую этого изменения называют первой вариацией функционала и обозначают $\delta\Phi$. Первая вариация функционала (II.8) определяется выражением

$$\delta\Phi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right] dx. \quad (\text{II.9})$$

Аналогично понятию второго дифференциала функции в вариационном исчислении вводят понятие второй вариации функционала. Для простоты записи в дальнейшем ограничимся случаем, когда функционал зависит только от функции $y(x)$ и ее первых двух производных. Тогда вторая вариация функционала определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta^2\Phi = & \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} (\delta y'')^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y''} \delta y \delta y'' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} \delta y' \delta y'' \right] dx. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Основная задача вариационного исчисления может быть сформулирована так: среди всех допустимых по условиям данной задачи функций найти такую функцию $y = y(x)$, которая доставляет заданному функционалу экстремальное значение. Необходимым условием экстремума функционала, как и необходимым условием экстремума функции, является условие стационарности

$$\delta\Phi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right] dx = 0. \quad (\text{II.11})$$

Из этого условия может быть получено дифференциальное уравнение Эйлера, которому должна удовлетворять искомая функция, а также те граничные условия, которым она может быть подчинена.

Последовательно интегрируя по частям выражение (II.11), избавимся от вариаций производных искомой функции под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right] dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_a^b + \\ & + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right] dx = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \Big|_a^b + \\ & + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right] \delta y dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Откуда следует, что условие стационарности $\delta\Phi = 0$ выполняется при всех допустимых $\delta y(x)$ если, во-первых, выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом, равно нулю

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad (\text{II.13})$$

и, во-вторых, при $x = a$ и $x = b$ выполняются условия

$$\delta y = 0 \quad \text{либо} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0,$$

$$\delta y' = 0 \quad \text{либо} \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \quad (II.14)$$

Уравнение (II.13) является уравнением Эйлера. В данном случае, когда функционал зависит от второй производной искомой функции, это уравнение имеет четвертый порядок. Условия (II.14) дают четыре граничных условия при $x = a$ и $x = b$, причем условия $\delta y = 0$ и $\delta y' = 0$ означают, что при $x = a$ и $x = b$ могут быть заданы $y(a)$, $y'(a)$ и $y(b)$, $y'(b)$. В общем случае, когда функционал зависит от производных до m -го порядка включительно, уравнение Эйлера имеет порядок $2m$ и соответствующее число граничных условий.

Условие стационарности является необходимым условием максимума или минимума функционала. Стационарное значение функционала соответствует минимуму (или максимуму), если вторая вариация функционала $\delta^2\Phi$ является положительно (отрицательно) определенной, т. е. при любых допустимых по условиям задачи вариациях выполняется условие

$$\delta^2\Phi > 0 \quad (\delta^2\Phi < 0). \quad (II.15)$$

Все сказанное выше может быть обобщено для случая функционалов, зависящих от нескольких функций одной или нескольких независимых переменных. Так, например, если задан функционал

$$\Phi = \int_a^b F(x, u, v, u', v', u'', v'') dx, \quad (II.16)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то его первая вариация определяется зависимостью

$$\delta\Phi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' \right] dx. \quad (II.17)$$

Условие стационарности приводит к системе уравнений Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial u''} &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v''} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II.18)$$

Когда функционал зависит от функций нескольких переменных, условие стационарности приводит к уравнениям Эйлера в частных производных. Общая схема получения этих уравнений остается прежней.

Кроме рассмотренных задач на безусловный экстремум для функционалов, возможны задачи на условный экстремум. В таких задачах функции, от которых зависят исследуемые функционалы, связаны некоторыми дополнительными условиями.

Например, задача может быть сформулирована так: найти функцию $y = y(x)$, доставляющую стационарное значение функционалу

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx, \quad (II.19)$$

если искомая функция подчиняема дополнительным интегральным связям вида

$$\int_a^b G_i(x, y, y', y'') dx = g_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k), \quad (II.20)$$

где g_i — заданные константы. Решение задачи по определению необходимых условий экстремума можно получить методом множителей Лагранжа, отыскивая условия стационарности вспомогательного функционала

$$\Phi^* = \int_a^b F^*(x, y, y', y'') dx. \quad (II.21)$$

Принимая здесь

$$F^*(x, y, y', y'') = F(x, y, y', y'') + \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i(x, y, y', y''), \quad (II.22)$$

где λ_i — неизвестные постоянные (множители Лагранжа).

При заданных граничных условиях для определения k множителей Лагранжа и искомой функции $y(x)$ используют k условий связи (II.20) и уравнение Эйлера для вспомогательного функционала

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F^*}{\partial y''} = 0. \quad (II.23)$$

Для функционалов, зависящих от нескольких функций $y_i = y_i(x)$, возможны задачи на условный экстремум не только при интегральных, но и дополнительных конечных или дифференциальных связях, накладываемых на искомые функции. Так, например, можно поставить задачу: найти условие стационарности функционала

$$\Phi = \int_a^b F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) dx, \quad (II.24)$$

если n неизвестных функций $y_i = y_i(x)$ дополнительно связаны конечными или дифференциальными соотношениями

$$G_j = G_j(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (II.25)$$

Число дополнительных связей должно быть меньше числа искомых функций, т. е. всегда $k < n$.

Эту задачу тоже можно решать методом множителей Лагранжа, отыскивая условия стационарности вспомогательного функционала (II.21), где теперь

$$F^* = F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) G_j. \quad (II.26)$$

Здесь $\lambda_j(x)$ — функциональные множители Лагранжа. Для определения n искомых функций $y_i = y_i(x)$ и k функций $\lambda_j = \lambda_j(x)$ достаточно системы n уравнений Эйлера (вместе с заданными граничными условиями) для вспомогательного функционала F^* и k условий связи (II.25).

Аналогичные приемы решения, основанные на введении множителей Лагранжа, используют и в тех случаях, когда искомые функции зависят от нескольких переменных [41].

Список литературы

1. Александров А. В., Лашенков Б. Я. О применении энергетического метода в задачах устойчивости упругих систем. — «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 5, с. 28—32
2. Алфутов Н. А. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечным набором и нагруженной внешним давлением. — «Инженерный сб. АН СССР», 1956, т. XXIII, с. 36—46.
3. Алфутов Н. А., Соколов В. Ф. Определение нижнего критического давления упругой цилиндрической оболочки и поведение оболочки после потери устойчивости. — «Расчеты на прочность в машиностроении» 1959, № 89, с. 95—110. [Труды МВТУ].
4. Алфутов Н. А. О влиянии граничных условий на значение верхнего критического давления цилиндрической оболочки. — В кн.: Расчеты на прочность Вып. 11. М., «Машиностроение», 1965, с. 349—365
5. Алфутов Н. А. Определение верхнего критического давления для консольной оболочки с подкрепленным краем. — «Изв. АН СССР. Механика», 1965, № 5, с. 115—118.
6. Алфутов Н. А., Балабух Л. И. Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряженного состояния. — «ПММ», 1968, т. XXXII, вып. 1, с. 703—707.
7. Андреев Л. В. Устойчивость цилиндрической оболочки при совместном действии изгибающего момента и внешнего давления. — «Прикладная механика», 1968, № 6, с. 129—132.
8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974. 446 с.
9. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев. «Наукова думка», 1973. 248 с.
10. Балабух Л. И., Шаповалов Л. А. Некоторые задачи устойчивости круглых пластин при неоднородном напряженном состоянии. — «МТТ», 1966, № 5, с. 60—69.
11. Бидерман В. Л. Устойчивость стержня из неогукковского материала. «ММТ», 1968, № 3, с. 54—62.
12. Бидерман В. Л. Статика тонкостенных систем. М., «Машиностроение», 1947. 488 с.
13. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., «Обorongиз», 1961. 367 с.
14. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961. 339 с.
15. Болотин В. В. О сведении трехмерных задач теории упругой устойчивости к одномерным и двумерным задачам. — В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М., Стройиздат, 1965, с. 186—196.
16. Болотин В. В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости. В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., «Судостроение», 1973, с. 83—88.
17. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. М., «Машиностроение», 1973. 456 с.

18. Валишвили Н. В. Расчет оболочек вращения на ЭЦВМ. М., «Машиностроение», 1976. 278 с.
19. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967. 984 с.
20. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., «Машиностроение», 1973. 170 с.
21. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. М., ОНТИ, 1935. 183 с.
22. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М., «Машиностроение», 1966. 508 с.
23. Кармишин А. В., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М., «Машиностроение», 1975. 376 с.
24. Койтер В., Хатчинсон Дж. Теория послекритического поведения конструкций. — В кн.: Механика. Период. сб. переводов. М., «Мир», 1971. 4, 129—149 с.
25. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968. 503 с.
26. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970. 940 с.
27. Механика твердых деформируемых тел. Серия «Механика». М., ВИНТИ, 1969. 384 с.
28. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948. 218 с.
29. Основы строительной механики ракет. М., «Высшая школа», 1969. 494 с. Авт.: Л. И. Балабух, К. С. Колесников, В. С. Зарубин и др.
30. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967. 420 с.
31. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. В. 4 т. Т. 4. Л., «Судостроение», 1963. 552 с.
32. Печников В. П., Шагина С. А. Исследование устойчивости конических оболочек матричными методами. Л., «Судостроение», 1975, с. 145—148. [Труды IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин].
33. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под ред. И. А. Биргера, Я. С. Пановко. Т. 3. М., «Машиностроение», 1968. 567 с.
34. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов. Л., «Судостроение», 1974. 342 с.
35. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 т. Под ред. С. Д. Пономарева. М., «Машиностроение», 1959. 1118 с.
36. Ржаницин А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехиздат, 1955. 475 с.
37. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1946. 532 с.
38. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы. М., «Наука», 1971. 808 с.
39. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1967. 376 с.
40. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1971. 192 с.
41. Эльсгольд Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969. 424 с.

Оглавление

Предисловие	5
Г л а в а 1. Основные понятия теории упругой устойчивости . .	7
§ 1. Неоднозначность состояний равновесия упругих систем	7
§ 2. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия	10
§ 3. Точки бифуркации, предельные точки и критические нагрузки	15
§ 4. Линеаризованные уравнения	21
§ 5. Энергетический подход к определению критических нагрузок	26
§ 6. Устойчивость упругих систем при комбинированном нагружении	30
§ 7. О постановке задач устойчивости тонкостенных систем	35
Г л а в а 2. Энергетический метод решения задач устойчи- вости	39
§ 8. Полная потенциальная энергия и условия равновесия упругого тела	39
§ 9. Вариационный принцип теории упругой устойчивости	46
§ 10. Энергетический критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко	57
§ 11. Метод Рэлея—Ритца в задачах устойчивости	64
§ 12. Связь метода Рэлея—Ритца с методом Галеркина	71
Г л а в а 3. Устойчивость прямых стержней при продольном сжатии	78
§ 13. Основное линеаризованное уравнение и его решение	78
§ 14. Решение задач устойчивости стержней энергетическим методом	90
§ 15. Стержни на упругом основании и упругих опорах	99
§ 16. Учет деформаций сдвига; общая и местная устойчивость трехслой- ных и тонкостенных стержней	109
§ 17. Закрытое деформирование упругих стержней	118
§ 18. Влияние начальных неправильностей на поведение сжатых стерж- ней	127
Г л а в а 4. Устойчивость пластин	134
§ 19. Постановка задачи; исходные зависимости	134
§ 20. Основное линеаризованное уравнение	142
§ 21. Решение основного уравнения для прямоугольных пластин	151
§ 22. Решение основного уравнения для круглых пластин	163
§ 23. Приближенные решения основного линеаризованного уравнения	168
Г л а в а 5. Энергетический метод исследования устойчивости пластин	178
§ 24. Энергетический критерий устойчивости в форме Брайана	178
§ 25. Энергетический критерий устойчивости в форме С. П. Тимошенко	188
§ 26. Формулировка критерия устойчивости через статически возмож- ные усилия	193
§ 27. Термоупругая задача устойчивости пластин	198

§ 28. Примеры использования энергетического критерия устойчивости . . .	201
§ 29. Устойчивость пластин при локальных нагрузках	208
§ 30. Закритическое поведение пластин	214
Г л а в а 6. Устойчивость цилиндрических оболочек	220
§ 31. Устойчивость кругового кольца	220
§ 32. Основные исходные зависимости для цилиндрической оболочки . . .	238
§ 33. Определение внешнего критического давления	249
§ 34. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии	258
§ 35. Об исследовании устойчивости цилиндрических оболочек с позиций нелинейной теории	268
Г л а в а 7. Использование полубезмоментной теории В. З. Вла- сова	271
§ 36. Основные зависимости полубезмоментной теории	271
§ 37. Устойчивость ортотропной оболочки при внешнем давлении	278
§ 38. Устойчивость оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами . .	284
§ 39. Определение критических нагрузок с помощью критерия устойчи- вости в форме С. П. Тимошенко	292
Приложение I. Задачи на собственные значения	300
Приложение II. Стационарные значения и экстремумы функций и функ- ционалов	303
Список литературы	308

ИБ № 2004

**Николай
Анатолеви
Алфут**

**ОСНОВЫ РАСЧЕТА
НА УСТОЙЧИВОСТЬ
УПРУГИХ СИСТЕМ**

Убедительная просьба

Во время чтения и разглядывания книги, эстампы, фотографии и т. д.

1) Никак не поднимать, раскрашивать и отклеивать не делайте;

2) при перелистывании страниц, пальцы отнюдь не мочить;

3) перелистывать медленно и аккуратно, чтобы нечаянно углы страниц и наклеенных рисунков не загнулись и не сдвинулись, а также прокладку из лаковой бумаги между рисунками не испортили;

4) при разглядывании эстампов, фотографий и рисунков в книжке не курить и табачный дымом их не обдавать;

5) перед началом разглядывания и чтения книги тщательно мыть потными руками также отнюдь не сдвигать;

6) из самого рисунка на эстампах, фотографиях и т. д. пальцами не прикасаться;

7) Основную или переделку книги не перевертывать, обертывать в бумагу;

8) листы книги для печати не загибать;

9) не наклеивать ничего не носить или не употреблять при этом особую предосторожность, чтобы книги не испачкались и не испортились.

**Редактор издательства
З. З. Акчурина**

**Технические редакторы:
А. И. Захарова, Л. А. Мака**

**Корректор
А. А. Састина**

**Переплет художника
А. Я. Михайлова**

**Сдано в набор 12/VII 1977 г.
Подписано к печати 23/IX 1977 г.
Т-16234. Формат 60х90/16
Бумага типографская № 1.
Усл. печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 19,8
Тираж 13 000 экз. Заказ 377. Цена 1р**

**Издательство «Машиностроение», 107
Москва, Б-78, 1-й Басманный пер.**

**Ленинградская типография № 6
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
193144, Ленинград, С-144,
ул. Мойсеенко, 10**